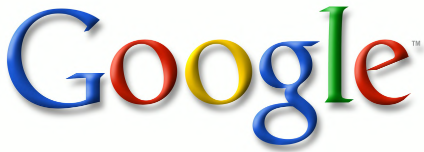
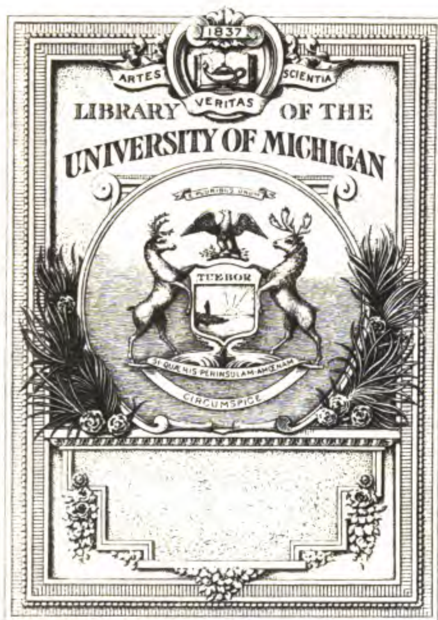



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE





SECTIONUM CONICARUM TRACTATUS

Selectas earumdem ex Veteribus & Recentioribus Geometris proprietates continens, & in hac Nova Geometriæ Editione in gratiam studiosæ Juventutis editus

AUCTORE

D. JOSEPHO ORLANDO

Congregationis Cœlestinorum Ordinis S. Benedicti Theologiæ & Sacrorum Canonum Magistro, & in Regia Neapolitana Academia Physicæ Experimentalis Professore.



NEAPOLI, MDCCXLIV.

SUPERIORUM FACULTATE.

STUDIOSIS
GEOMETRIÆ
TIRONIBUS.

Diligenter jam evolutis quæ a Cl. nostro Auctore Andrea Tacquet Planæ & Solidæ Geometriæ concinnata sunt Elementa, selectaque ex Archimede Theoremata, ordo postulat, ut Sectionum Conicarum doctrina vester modo imbuatur animus, eidemque sedulam operam vestram impendatis. Earum siquidem curvarum, proprietatumque ad eas spectantium cognitio adeo Matheseos & Physices studiosis est necessaria, ut sine illâ neque pedem vel bilum in utraque disciplina promovere liceat. Tantique propterea semper habita est earum scientia, ut omni ævo a primi subsellii Geometris exculta, promotaque fuerit; Magnique Geometræ nomen Apollonio Pergæo sit a Veteribus concessum, quod Sectionum Conicarum doctrinam uberrime fuerit prosequutus octo de iis conscriptis libris.

Atque ut vobis magis innotescat, quam in Mathesi universa earum curvarum scientia latepateat, scire imprimis oportet problemata geometrica quæcunque ad duas supremas classes posse revocari. Alia quippe sunt & dicuntur determinata; quod solutionum diversarum determinatum numerum habeant: alia vero indeterminata; quod infinitis

plane modis resolvi possint. Sic e. g. si in data recta punctum petatur ita eam dividens, ut quod subinde fit ex segmentis rectangulum quadratum alterius datæ adæquet, determinatum erit problema; quod duobus tantum punctis quæsito satisfieri possit; vel etiam uno tantum, si altera data prioris datæ semissem adæquet; quemadmodum ex schol. prop. 13. *l.* 6. *facile liquet. At si extra datam rectam punctum quæratur, ex quo ad ipsam ducta perpendiculari, sit ejus quadratum æquale rectangulo ex segmentis datæ, problema erit indeterminatum; quod nempe infinita ejusmodi puncta possint inveniri, quibus quæsito satisfiat. Descripto enim super data recta circulo, patet quodvis ejus circumferentiæ punctum quæsito satisfacere.*

Videtis igitur quemadmodum ejusmodi problematum, quæ indeterminata dicuntur, infinitæ sunt solutiones, infinitaque solventia puncta. Hæc vero puncta ita plerumque disponuntur, ut lineam quamdam vel rectam vel curvam constituant, ut in mox relato exemplo: ac Geometrarum est ejus lineæ naturam determinare, quæ est punctorum omnium quæsito satisfacientium veluti sedes & geometricus locus. Sunt autem ejusmodi lineæ cum recta & circuli circumferentia, tum plerumque Sectiones Conicæ; ac infinita pene sunt problemata, in quorum solutione ad eas est confugiendum, utpote singulis punctis suis quæsito satisfacientes. Hæc sane geometrica loca plurimum a veteribus exculta fuisse ex iis liquet, quæ Collect. Math. l. 7. *memorat Pappus Alexandrinus. At modo eadem doctrina recentiorum Mathematicorum, Cartesii potissimum, Graigii, & Hospitalii conati-*

bus adeo promota est, ut nil desiderandum superfit, expeditissimaque aperta sit via, qua nullo negotio vel ab ipsis Tironibus quæcunque hujus generis problemata solvi possunt. At Sectionum Conicarum affectiones, præcipuaque saltem earum theoremata probe sunt tenenda; alias vanus & inutilis omnis erit conatus, nobilisque Matheseos pars nec primoribus labris attingi poterit.

Præterea & quæ determinata dicuntur problemata sectiones conicas plerumque exigunt, nec sine iis resolvi ullo modo possunt. Horum enim aliqua plana dicuntur, quod videlicet lineis in plano descriptis, recta nempe, & circuli circumferentia absolvantur, quæque sane Conicis Sectionibus non indigent. Alia vero solida dicta sunt, quod nempe curvis lineis in eorum solutione opus sit, a coni, quod solidum est, per planum sectione ortis; quæ sunt Parabola, Ellipsis, & Hyperbola. Atque huc spectat celeberrimum omni ævo de cubi duplicatione problema, & alterum de anguli cujuscumque trisectione; utrumque enim sine Conicis Sectionibus solvi haud posse constat; vanique adhuc extitere, eruntque in perpetuum eorum conatus, qui utriusvis ejus problematis solutionem locis planis, seu solis circulo & recta linea perficere conati sunt. Alia tandem problemata linearia sunt dicta, quod nempe aliis curvis construantur Sectionum Conicarum naturam vel gradum prætergredientibus. Unde patet non tantum in conicis curvis versari oportere Matheseos studiosum, sed harum quoque alterius generis curvarum aliquam scientiam sibi comparare.

Sed nedum in Mathesi pura ingens est Sectio-

rum Conicarum usus, verum & in ipsa naturæ contemplatione frequentissime eædem adhibendæ veniunt; ut propterea qui earum cognitione caret, abditissima naturæ penetralia attingere haudquaquam poterit. Quæ enim a Galilæo primum, tum a Nevvtono, Bernoullis fratribus, Hermanno, aliisque celeberrimis viris de corporum motibus, viribus centralibus, cœlestium corporum orbita, atque periodo detecta sunt & demonstrata, arctissimam cum Sectionum Conicarum doctrina conjunctionem habent; ab iisdemque Statica, Hydrostatica, Optica, Gnomonica, Astronomia, aliæque Physico-Mathematicæ disciplinæ maxime dependent. Quo igitur ad physicas scientias facilis vobis detur aditus, Sectionum Conicarum naturam, proprietatesque saltem præcipuas probe teneatis oportet.

Quis autem primus de ejusmodi curvis cogitaverit, non ita facile poterit definiri. Sunt qui Pythagoræ, qui Eudoxo Gnidio Platoni synchrono, qui tandem Menechmo Eudoxi discipulo, earum inventionem acceptam referunt. Id unum hac in re constat longe ante Apollonium Pergæum earum curvarum doctrinam excultam fuisse, veluti ab Aristæo seniori, ab Euclide, & ab Archimede. Aristæum certe qui ante Euclidem floruit, quinque de Conicis libros conscripsisse testis est Pappus Alexandrinus Collectionum Mathematicarnm l. 7. Hæc vero Aristæi scripta temporum injuria deperdita Vincentius Viviani insignis Geometra Florentinus divinando restituere conatus est, elegantissimo edito opere de Locis Solidis, quod Ludovico XIV. Galliarum Regi inscripsit. Aristæum sequutus est Euclides, qui Conicam doctrinam ma-

xime

xime etiam excoluit, quatuor de iis conscriptis libris teste eodem Pappo. Archimedem demum Siracusanum Sectionum Conicarum doctrinam probe calluisse, promovisseque indubia res est: quin suspicio quibusdam incidit, etsi parum firma *, *quae ab Apollonio deinceps de Sectionibus Conicis edita fuere, Archimedis opus fuisse, eaque a suo Auctore nondum edita Apollonium involasse, proque suis edidisse. Parabolae quidem quadraturam Archimedes omnium primus exhibuit, ostendens ejus spatium esse ad circumscriptum parallelogrammum uti duo ad tria seu in ratione subsesquialtera.*

Sed ad ipsum veniamus Apollonium Pergaeum, quippe Pergae Pamphiliae civitate natum. CCL. *circiter ante Christum annis Magni Geometrae nomine floruit ob ipsam Conicam scientiam, quam maxime calluit, de qua etiam absolutum opus conscripsit octo libris comprehensum. Priores quatuor, teste Pappo Alexandrino Collect. l. 7. ii sunt, quos de eodem argumento antea scripserat* Euclides: *eos tamen commentario ab Apollonio illustratos & absolutos, atque quatuor aliorum librorum auctario ornatos Apollonius ipse in lucem edidit. Superiori saeculo nonnisi hi quatuor Euclidis vel Apollonii libri extabant, reliquorum nil aliud praeter argumentum; cum forte fortuna in quintum, sextum & septimum arabice versos in MSC. Bibliothecae Mediceae incidit Alphonsus Borellus, quos opera Abrahami Echellensis Maronitae usus latine reddidit, & cum libro Assumtorum Archimedis Florentiae in lucem traxit. Antequam autem hi Apol-*

 lonii

* Vide Voss. de Scriptor. Mathem. & Bael. in lex. Art. Apollonius.

lonii libri per Echellensem latinitate fuissent donati, atque ita litterato Orbi innotuissent, Vincentius Viviani ex noto tantum quinti libri argumento apud Pappum Alexandrinum, eum divinando restituere conatus est, ediditque hoc titulo De Maximis & Minimis geometrica divinatio in quintum Conicorum Apollonii Pergæi adhuc desideratum. *Detectis vero & editis germanis Apollonii libris, factaque inter hujus quintum, & ejusdem Viviani divinationem collatione, observatum est non tantum Vivianum plerumque divinasse, sed longius Apollonio ipso progressum fuisse. Octavum tandem Conicorum Apollonii librum adhuc desideratum in præstantissima ejusdem operum editione Oxon. anno* 1710. *restituit ac edidit Cl. Halleius. En autem singulorum librorum argumenta ipsismet Apollonii verbis ex ejus ad Eudemum epistola:* Ex octo, *inquit*, libris, quatuor primi hujus disciplinæ continet elementa: quorum primus complectitur generationes trium coni sectionum, & earum quæ oppositæ dicuntur, itemque principalia ipsarum accidentia, a nobis & uberius & universalius, quam ab iis, qui de ea re scripserunt, elaborata. Secundus liber tractat ea, quæ attinent ad diametros, & ad axes sectionum, & ad illas lineas, quæ cum sectione non conveniunt; tum de aliis differit, quæ & generalem, & necessariam utilitatem ad determinationes afferunt. Tertius liber continet multa & admirabilia Theoremata, quæ utilia erunt & ad solidorum locorum compositiones, & ad determinationes; quorum complura & pulcherrima

rima, & nova sunt. Quartus liber tradit quot modis conorum sectiones inter sese, & circuli circumferentiæ occurrere possint. Reliqui vero quatuor libri ad abundantiorem scientiam pertinent. Etenim quintus de Minimis & Maximis magna ex parte agit. Sextus de æqualibus & similibus coni sectionibus. Septimus continet Theoremata quæ determinandi vim habent. Octavus problemata conica determinata.

Veteres qui Apollonium præcesserunt, Ellipsim ex solo cono acutangulo, Hyperbolam ex obtusangulo, & Parabolam tandem ex rectangulo secuerunt. At Apollonius ex quocunque cono sive acutangulo sive obtusangulo sive rectangulo singulas tres sectiones oriri posse docuit. Harum linearum proprietates insigni ingenii acumine, & demonstrationum geometricarum subtilitate is exposuit: in quibus quod nimis difficilis, nimis etiam scrupulosus quibusdam videatur, ea demonstrans, quæ per se clara sunt, summa potius laude, quam reprehensione dignus videtur; quod nempe ita Geometriæ certitudinem adversus Scepticorum contradictiones sartam tectamque servavit. Veteres enim laxum illum demonstrandi modum nihili facientes, minutissima quæque expendere, & quæcunque extra definitionum & axiomatum ambitum continebantur, demonstrare maluerunt, quam ullam cavillandi ansam Scepticis relinquere. Diffiteri tamen haud potest universam de Sectionibus Conicis doctrinam paulo facilius & simplicius tradi potuisse, quam ab Apollonio factum, idque citra ullum perspicuitatis demonstrationum detrimentum. Reapse id ex recentioribus plurimi præstitere, inter quos

com-

commendari potissimum debent Claudius Mydorgius, Vincentius Viviani, Gregorius a S. Vincentio, Philippus de la Hire, Marchio Hospitalius, & omissis ceteris, quos longum esset recensere, Nicolaus de Martino in nostro Neapolitano Lycæo Matheseos eximius Professor. Hi sane præclarissimi viri non modo vetera inventa concinnius, & elegantius demonstrarunt, sed etiam novas Sectionum Conicarum proprietates in medium produxere, quibus earumdem curvarum scientia ad summum perfectionis apicem deducta est.

Porro nostro hoc de Sectionibus Conicis tractatu singula ad eas spectantia sive a Veteribus, sive a Recentioribus detecta & demonstrata complecti haud est animus; ad id enim præstandum incenti opus esset volumine. Præcipuas tantum illarum proprietates, & eas præsertim quarum in Physico-Mathematicis disciplinis ingens solet esse usus collegimus ac demonstravimus; easdemque in vestrum commodum, ne aliunde eas quærere debeatis, novæ huic Editioni Geometriæ adjecimus. Syntheticam Veterum demonstrandi methodum, analiticæ alteri Recentiorum prætulimus; tum quod analyticam artem non adhuc fortasse vos calleatis; tum præsertim quod etsi ad inveniendum plurimum ea conferat, ad docendum tamen parum apta est; longeque ad id accomodatior veterum rigida demonstrandi methodus. Quosdam Sectionum Conicarum physicos usus Tironum captui magis accomodatos, tum quædam ad eruditionem & historiam spectantia huc illuc interseruimus; quæ quoniam prima saltem vice præteriri a Tironibus possunt, distincto & minutiori charactere imprimi curavimus.

SE-

SECTIONUM CONICARUM TRACTATUS.



CAPUT PRIMUM.

Definitiones ad Sectionum Conicarum doctrinam pertinentes traduntur.

DEFINITIO I.



I ab aliquo puncto A extra planum circuli BED ad ejusdem circumferentiam conjuncta recta AB utrimque producatur; & manente puncto A circa circuli circumferentiam convertatur, quousque ad eum locum redeat, a quo cœpit moveri; Superficiem HAGFI a recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus HAI, GAF ad verticem A inter se connexis, quarum utraque in infinitum augetur, aucta scilicet in infinitum recta linea GABH, quæ eam describit, voco *Conicam Superficiem*. *Conum* autem dico figuram BAD contentam circulo BED, & conica superficie BAD, quæ inter punctum A & circuli circumferentiam interjicitur. *Fig.* 1.

Punctum A dicitur *Vertex* vel *Apex* coni. Circulus BED est ejusdem coni *basis*. Recta per verticem A & centrum circuli C ducta, dicitur *Axis* coni. Hic si fuerit basi perpendicularis, conus dicitur *Rectus*; *Scalenus* vero si basi oblique jaceat.

Re-

Recta AB ex vertice A ad circumferentiæ BED punctum quodvis B ducta, dicitur *Latus* coni. Conferantur hæc cum definit. 2. l. 12.

COROLLARIA.

Fig. 2. I. EX exposita coni generatione facile infertur rectam ex vertice A ductam ad quodvis in superficie conica punctum F in eadem esse coni superficie, eamque productam basis circumferentiæ occurrere. Nam cum puncta A, F in ipsa sint coni superficie, patet rectam AB eamdem conicam superficiem describentem per ipsa puncta A, F transituram. Sed tum AF in ipsa est coni superficie, atque producta basis circumferentiæ occurrit, ut ex coni generatione liquet. Ergo patet quod erat propositum.

II. Si in coni superficie duo puncta F, K sumantur, eaque conjungens recta FK per verticem non transeat, transibit tota intra coni superficiem. Jungantur enim rectæ per verticem transeuntes AF, AK basis circumferentiæ occurrentes punctis B & N (*a*), quæ conjungantur recta BN. Hæc sane intra circulum cadet (*b*), ac proinde intra superficiem conicam: Ergo (*c*) trianguli BAN planum intra eamdem superficiem est: Ergo etiam recta FK intra eamdem erit coni superficiem.

[a] *Cor.* 1. [b] *Per* 2. *l.* 3. (c) *Per* 2. *l.* 11.

III. Ex ipsa etiam coni generatione patet rectas BA, NA, & quotvis alias ex vertice ad basis circumferentiam ductas cum axe AC eundem semper angulum in vertice A facere, quoties conus rectus est. Siquidem duo triangula BAC, NAC per hypothesim habent angulos ACB, ACN rectos, ac proinde æquales, latus AC est utrisque commune; tum æqualia sunt latera BC, CN utpote ejusdem circuli radii. Ergo (*d*) etiam anguli BAC, NAC æquales erunt.

(d) *Per* 4. *l.* 1.

SCHO-

SCHOLIUM.

Hinc ratio intelligitur cur in Iride sive primaria sive secundaria colores sub circularis arcus forma conspiciantur. Sit spectator in O medius inter pluviam decidentem & Solem. Tum ex centro Solis linea OL per spectatoris oculum transire concipiatur, quae sit parallela lucis radiis veluti AN pluviae guttas stringentibus. Radius AN refractus in N, inde reflexus ad M, & tandem refractus ex gutta exiens ad oculum O perveniat angulum efficiens MOL gr. 42. 2' : colorem rubrum tunc excitari constat a radio MO sic ad oculum appulso. Ex M ad OL perpendicularis ducatur MC; ac fingamus circa OL tanquam axim radium MO revolvi, itaut conica superficies inde fiat, cujus vertex O, basis vero circulus radii MC. Jam patet singulas pluviae guttas in hujus circuli peripheria degentes, & radios Solis parallelos excipientes, eosdem ad oculum O mittere similiter refractos, & sub eodem angulo gr. 42. 2' [a]; propterea; arcum circuli rubro colore tinctum apparere debere. Cumque etiam certi & definiti sint anguli, sub quibus reliqui Iridis cum primariae, tum secundariae colores apparent, liquet eos omnes sub circularis arcus forma videri debere. Atque ex eodem fonte profluit, quod in Halonibus & Coronis iidem colorati arcus circulares appareant.

Fig. 3.

(a) *Per cor. 3.*

DEFINITIO II.

Sectiones coni sunt lineae quae describuntur in superficie coni, dum aliquo plano conus secatur.

SCHOLIUM.

Ut probe haec definitio intelligatur, notandum duplicem esse hujus sectionis casum; vide-

videlicet vel planum secans per verticem coni transit, vel non per verticem. Si primum, sectio erit linea recta, indeque orta figura, erit triangulum. Si secundum, sectio ad lineas curvas pertinebit.

Fig. 2. Secetur itaque primum conus BAD plano per verticem transeunte, indeque oriatur figura BAN. Communes sectiones AB, AN plani secantis & superficiei conicæ sunt lineæ rectæ; nam assumtis punctis B & N in superficie conica a plano secante signatis, jungantur rectæ AB, AN, erunt istæ in plano secante: Sed sunt etiam in superfi-
(a) Per cor. 1. defin. 1. cie conica (*a*); ergo communes sectiones sunt plani secantis & conicæ superficiei. Igitur secto cono plano per verticem, fient in ejus superficie binæ rectæ. Est item BN communis sectio basis coni & plani secantis (*b*) recta linea: ergo BAN
(b) Per 3. l. 11. est triangulum. Eadem est demonstratio si planum secans per axem coni transeat; tunc similiter fiet sectio triangularis BAD, cujus basis BD est semper circuli BED diameter.

Fig. 4. At non transeat modo planum secans per coni verticem; sitque ejusmodi plani & superficiei conicæ communis sectio HIG. Hanc lineam curvam esse dico. Si fieri enim potest, sit vel tota, vel aliqua ejus portio recta & non curva. Quoniam autem ea in plano secante, quod per verticem non transit, reperitur, nec etiam ipsa ad
(c) Per cor. 2. defin. 1. verticem pertinebit, proindeque (*c*) intra superficiem conicam cadet; nec adeo erit plani secantis & superficiei conicæ communis sectio; quod est contra hypothesim.

SCHOLIUM II.

At non uno eodemque modo secari potest conus plano non per verticem transeunte: hinc pro variis ejusmodi sectionibus, variæ etiam

oriri

oriri possunt lineæ curvæ, quas modo recensere, & explicare juvat.

Potest itaque imprimis secari conus plano æquidistante plano basis, veluti si conus BAD secetur plano HIG, quod plano basis BED sit parallelum: dico circulum ea sectione fieri, ejusque centrum in axe AC reperiri. Ducatur enim planum aliud conum secans per axem, sectionem faciens triangularem BAD, cujus & planorum æquidistantium HIG, & BED communes sectiones sint HG & BD. Sumatur porro in sectione HIG punctum utcunque I, ducaturque per verticem recta AIE circumferentiæ basis occurrens in E; & connectantur LI, CE. Jam ob HG, BD, ac LI, CE (*a*) parallelas erit (*b*) CD ad LG ut CA ad AL; tum CE ad LI ut CA ad AL (*c*). Ergo (*d*) CD ad LG ut CE ad LI. Quapropter cum CD, CE æquentur utpote radii circuli BED, etiam (*e*) LG, LI æquales erunt: idemque cum de reliquis a puncto L ad sectionem ductis rectis ostendi possit, patet figuram HIG circulum esse, ejusque centrum L in axe AC reperiri Q. E. D. *Fig.* 4.

[a] *Per* 16.*l*.11.
[b] *Per* 4.*l*.6.
[c] *Per eand.*
[d] *Per* 11.*l*.5.
[e] *Per* 14.*l*.5.

Hic sectionis modus circulum gignens æque recto ac scaleno cono convenit. Sed alia etiam datur pro cono tantum scaleno sectio circulum producens. Sit itaque conus scalenus BAC, isque plano per axem ABC basi BEC perpendiculari secetur: tum secetur altero plano GHK ad triangulum per axem recto, & ex quo aliud triangulum abscindat GAK eidem BAC simile, sed subcontrarie; ita videlicet, ut angulus AGK angulo ACB sit æqualis, & angulus AKG angulo ABC. Dico sectionem hujusmodi circulum etiam esse. *Fig.* 5.

In ejus enim perimetro GHK accipiatur punctum quodcunque H, a quo ducatur HF recta plano ABC, quæ etiam ad rectam GK communem planorum sectionem perpendiculariter cadet (*f*) puta in F. Per F ducatur DE ad BC parallela; & erit planum per DE, HF, parallelum basi

[f] *Per def.*4. *l*.11.

BEC.

BEC. (Nam si per quodvis circumferentiæ basis punctum E ducatur EI perpendicularis plano BAC, atque adeo communi sectioni BIC, erunt duæ EI, HF (*a*) inter se parallelæ; proindeque (*b*) etiam planum per DE, HF transiens parallelum sit plano basis). Tum sectio DHE circulus erit, in quo (*c*) FD × FE = FHq. Quia vero angulus ADE = ang. ABC (*d*) & ex hyp. ang. ABC = AKG, erit etiam angulus ADE = AKG; tum angulus KFE = GFD (*e*), ac proinde reliquus EFK æqualis reliquo DGF. Æquiangula igitur sunt trigona KFE, DFG; unde (*f*) erit EF: FX :: FG : FD; & (*g*) FK × GF = EF × FD = HFq.. Quare cum in figura GHK sit quadratum HF perpendicularis ad GK æquale rectangulo GFK ex segmentis ejusdem GK; omniumque similium perpendicularium quadrata correspondentibus rectangulis ex segmentis GK sint æqualia; facile per conversum cor. prop. 13. l. 6. (quod ab ipsismet tironibus nullo negotio demonstratur) figuram GHK circulum esse liquet. Q. E. D.

[a] *Per* 6. *l.* 11.
[b] *Per* 15. *l.* 11.
[c] *Per* 35. *l.* 3. *vel cor.* 1. 17. *l.* 6.
[d] *Per* 27. *l.* 1.
[e] *Per* 15. *l.* 1.
[f] *Per* 4. *l.* 6.
[g] *Per* 16. *l.* 6.

Fig. 6. 7. 8. At cum planum non per verticem transiens, per quod dividitur conus, plano basis occurrit, tres adhuc distingui possunt casus, ac tres inde oriuntur sectiones. Sit itaque conus DAB sectus primo plano per axem, sitque sectio triangularis inde genita DAB. Secetur modo alio plano MNG non per verticem transeunte, quod plano basis DMB occurrat in recta MG, quæ perpendicularis semper supponitur rectæ DB basi trianguli DAB.

Fig. 6. Est autem primus casus, cum communis sectio NK trianguli per axem DAB, & plani non per verticem transeuntis, parallela est alteri lateri AB ejusdem trianguli ADB; itaut si ipsa NK, vel planum secans MNG ultra N extra conum producatur in infinitum, nunquam alteri ad verticem A opposito cono occurrat. Eodem vero plano una cum ipso cono DAB infra N producto, sectio ipsa MNG in infinitum abibit, ejusque latera MN,

MN, NG magis semper ac magis a se invicem recedent. Ejusmodi curva vel sectio conica MNC, *Parabola* dicitur.

Secundus casus est cum communis sectio NK trianguli scilicet DAB, & plani non per verticem transeuntis haud parallela est lateri AB trianguli DAB; Sed si intra conum DAB infra N cum plano secante MNG producatur, a coni latere AB recedat semper magis ac magis; ultra vero N cum eodem plano MNG producta, cono ad verticem opposito TAY concurrat in Q; indeque intra illum producto eodem plano similem aliam sectionem XQR in ejus superficie faciat. Utravis harum curvarum MNG, XQR dicitur *Hyperbola*, & simul *Sectiones oppositæ*. Ex quarum genesi patet eas curvas in infinitum abire, earumque latera magis semper ac magis a se invicem recedere. *Fig. 7.*

Tandem tertius casus est cum ea communis sectio KN utrique lateri trianguli per axem BAD infra verticem A occurrit, puta in N & Q. Linea curva inde genita QGNM in seipsam rediens *Ellipsis* dicitur. Sed hæc eadem circuli circumferentia esse etiam potest, cum videlicet tam sectionis planum, quam planum basis triangulo per axem normale est, triangulumque QAN abscinditur alteri per axem BAD simile sed subcontrarie, uti superius demonstravimus. *Fig. 8.*

Præter hactenus recensitos sectionis modos nullus alius concipi potest, nec possibilis est: hinc consequitur quinque esse coni sectiones, triangulum videlicet, circulum, parabolam, hyperbolam & ellipsim. Sed postremæ tantum tres hic spectandæ veniunt, deque iis solum agemus; quod nempe trianguli & circuli aliunde notæ sint proprietates.

DEFINITIO III.

Fig. 6. 7. 8. CUjuscumque sectionis conicæ diameter est communis sectio trianguli per axem, & plani secantis. Ita sectionis conicæ MNG diameter est recta NK; communis vid. sectio plani per axem DAB, & plani MNG non per axem transeuntis.

SCHOLIUM.

NOtandum autem hic est ideo diametri nomen ei communi sectioni datum esse, quod transeat veluti per medium sectionis, eamque in duas æquales partes dividat. Quemadmodum enim, ut ex constructione liquet, recta MG bifariam dividitur in K a recta NK, ita etiam non difficulter demonstrabitur quasvis alias rectas in plano sectionis MNG ductas & rectæ MG parallelas ab eadem NK bifariam secari.

Fig. 9. Sit enim conus BAD per axem primo sectus; tum sumatur in ejus superficie punctum quodvis H, quod non sit in latere trianguli per axem, & ab ipso ducatur recta HI parallela cuidam rectæ EF, quæ perpendicularis est a circumferentia circuli BMD ad trianguli per axem basim BD: dico eam ulterius productam in L usque ad alteram superficiei conicæ partem bifariam ab ipso trianguli plano secari. Jungatur enim ex vertice A recta AH, quæ protracta circumferentiæ basis occurrat in M, per quod ducatur MKG ipsi EF parallela occurrens diametro basis in K, & circumferentiæ ex altera parte in G, ex quo ad verticem A ducatur recta GA. Jam vero quoniam duæ rectæ HL, MG parallelæ sunt eidem EF, prior per hyp., altera per constructionem, erunt hæ duæ inter se parallelæ [*a*], & in eodem trianguli MAG plano. Ergo HI producta oc-

(a) *Per* 9. *l.* 11.

occurret alicubi rectæ AG, puta in L. Hinc conjuncta AK, erit MK ad KG ut HI ad IL [*a*]: sed primæ rationis termini sunt æquales [*b*]; ergo & secundæ. Ergo HL bisecta est in I a recta AK, quæ est in plano per axem.

[a] *Per cor.2.pr. 4.l.6.*

[b] *Per 3.l.3.*

Hinc facile consequitur quod si conus plano per axem primo sectus, secetur insuper alio plano MNG, cujus communis sectio MG cum plano basis coni perpendicularis sit diametro ejusdem basis BD, seu basi trianguli per axem BAD; omnes rectæ ut mg, mg, quæ in hoc sectionis plano parallelæ ducuntur rectæ MG, bifariam secentur ab ipsa NK, quæ est communis sectio plani secantis MNG, & trianguli per axem DAB: Igitur tandem patet diametrum sectionis optime etiam definiri, quod sit recta bifariam secans quæ intra sectionis planum ducuntur cuidam determinatæ rectæ parallelæ. *Fig. 6.*

DEFINITIO IV.

V*Ertex*, vel *apex* sectionis conicæ veluti MNG est ejusdem sectionis punctum N, in quo diameter sectioni occurrit. *Fig. 6.7. 8.*

COROLLARIA.

I. HInc cum ellipsis in orbem redeat, ejusque diameter duobus punctis sectioni occurrat Q, N; duo erunt illius vertices, nempe Q, N. Similiter in hyperbola duo sunt vertices Q, N, nam ob aliam oppositam hyperbolam, quæ semper priorem comitatur, duo sunt puncta quibus diameter iis sectionibus occurrit. At in parabola MNG unicus est sectionis vertex, cum eidem in uno tantum puncto N diameter occurrat. *Fig. 8.* *Fig. 7.* *Fig. 6.*

II. Hinc etiam liquet in hyperbola & ellipsi rectæ QN longitudinem definitam esse, non ma- *Fig. 7.8.*

jorem scilicet ea, quæ utroque vertice terminatur. At in parabola ob unicum verticem, diametri longitudinem patet infinitam esse. Recta QN in hyperbola & ellipsi *latus transversum* earundem appellatur.

SCHOLIUM.

Fig. 7.8. IN sectione hyperbolica & elliptica eo major est lateris transversi NQ longitudo, quo minor est angulus KQB, manente eodem puncto N; quo enim minor est is angulus, eo magis punctum Q ab N recedit. Quod si igitur idem angulus KQB fiat infinite exiguus, punctum Q in infinitum recedet ab N, eritque latus transversum NQ infinitæ longitudinis. Cumque in triangulo KQB angulus DKQ utpote externus æqualis sit duobus internis KBQ & KQB; hoc evanescente, seu facto infinite exiguo, evadet angulus DKQ æqualis B; ideoque recta KQ [*a*] parallela rectæ BA, & sectio MNG parabola. Patet ergo parabolam considerari posse tam ut hyperbolam, quam ut ellipsim, quarum diameter sit infinitæ longitudinis: in eademque alium etiam spectari posse verticem in infinita a priori distantia.

[a] *Per* 28.*l*.1.

Fig. 8. Præterea quemadmodum diminuto angulo Q in infinitum, ellipsis QMN vertitur tandem in parabolam, ita vice versa aucto jugiter eodem angulo Q, ut tandem æqualis fiat angulo ABD, ellipsis in circulum vertetur. Facto enim angulo ABD æquali angulo Q, recta QN parallela fit ipsi BD, & totum sectionis planum QMNG parallelum plano basis. Hinc patet posse circulum veluti quandam ellipsis speciem spectari.

Qua in re ut series quædam & ordo ejusmodi variationum ex motu & varia plani secantis inclinatione dependentium constituatur, concipiamus conum plano per axem sectum secari insuper

per

per plano basi parallelo, itaut habeatur circularis sectio. Incipiat modo ejusmodi planum paulisper inclinari, & a parallelismo cum plano basis jugiter recedere, concurrente semper communi sectione ejusdem plani & trianguli per axem cum utroque trianguli latere infra coni verticem. Patet ejusmodi variis plani inclinationibus ellipses in superficie coni semper describi majoris ac majoris diametri pro varia plani inclinatione. At cum tandem eo devenit planum secans, ut ejus communis sectio cum plano per axem non amplius cum utroque latere infra verticem concurrat, sed uni eorum fiat parallela, tum ellipsis vertetur in parabolam; quæ propterea spectari poterit veluti ultima omnium variationum ad ellipsim spectantium. Procedente ulterius motu plani versus eandem partem, itaut sublato parallelismo concurrat ea communis sectio cum eodem trianguli latere, cui antea erat parallela, sed supra verticem coni; tum in hyperbolam vertetur parabola, quæ proinde haberi potest veluti prima ex infinitis variationibus ad hyperbolam spectantibus. Procedente adhuc motu & inclinatione plani versus eandem partem, post infinitas hyperbolas in superficie coni descriptas, in rectam lineam, seu in latus trianguli per axem tandem desinet hyperbola, eritque hyperbolarum omnium ultima linea recta. Si motus plani prosequatur, succedent ellipses, tum circulus, iterum ellipses, tum parabola, & sic porro ut supra.

DEFINITIO V.

ORdinata ad diametrum dicitur quævis æquidistantium linearum veluti mg, quæ a diametro bisecatur. Diametri vero portiones inter verticem & ordinatas interceptæ, veluti Np, Np, *Fig. 4.*

abscissa dicuntur. Et simul ordinata mg, & abscissa Np *coordinatæ* appellantur.

DEFINITIO VI.

AXis sectionis conicæ est, quæ tum bifariam, tum ad angulos rectos æquidistantes omnes secat.



CAPUT II.

Præcipuæ Parabolæ proprietates recensentur.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 10. *IN parabola MNG si ad quodlibet diametri punctum I ordinetur recta FIH parallela rectæ MG, seu communi sectioni plani secantis MNG, & basis coni DMB, erit quadratum ex MK vel KG ad quadratum ex FI vel IH, ut abscissa NK ad abscissam NI.*

Per idem punctum I ducatur in plano trianguli per axem DAB recta CIE parallela diametro basis DB: tum concipiatur per duas rectas CE, FH ipsis DB, MG parallelas planum transire CFEH; quod cum [*a*] parallelum sit plano basis DMB, circulus erit [*b*], cujus diameter CE, eique perpendiculariter applicata FIH [*c*]. Quemadmodum igitur quadratum MK vel KG æquale est rectangulo DKB [*d*]; ita ob eandem rationem, quadratum FI vel IH æquale erit rectangulo CIE. Erit itaque MKq : FIq :: rectang. DKB : rectang. CIE. Sed ob IE, KB æquales, est rectang. DKB : rectang. CIE :: DK : CI [*e*] seu :: KN : NI [*f*]. Ergo erit [*g*] MKq : FIq :: KN : NI. Q.E.D.

[a] Per 15. *l.*11.
[b] Per *sch.*2.*defin.*2.
[c] Per 10.*l.*11. *vel per* 3.*l.*3.
[d] Per *cor.*1.*pr.*17.*l.*6.
[e] Per 1.*l.*6.
[f] Per 4.*l.*6.
[g] Per 21.*l.*5.

CO-

COROLLARIA.

I. EX hac prima & præcipua parabolæ proprietate quemadmodum infertur abscissas NK, NI esse in ratione duplicata ordinatarum FI, MK (quæ est eadem ac ratio quadratorum earundem FI, MK); ita etiam liquet esse ipsas ordinatas MK, FI in ratione subduplicata abscissarum NK, NI, seu in ratione simplici NK ad mediam proportionalem inter NK & NI.

II. Si ex parabolæ AM vertice A ordinatis PM, pm parallela ducatur AR; & ex hujus punctis Q, q ipsi AP parallelæ ducantur QM, qm curvæ occurrentes in M, m; spectari hæ poterunt veluti ordinatæ ad diametrum AR, & AQ, Aq tanquam iisdem respondentes abscissæ, parabolæ convexitatem utræque respicientes: eruntque ejusmodi ordinatæ QM, qm ut abscissarum AQ, Aq quadrata. Nam [a] QM, qm ipsis AP, Ap æquales sunt, & AQ, Aq ipsis PM, pm item æquales; quare cum sit per prop. AP : Ap :: PMq : pmq, erit etiam QM : qm :: AQq : Aqq. *Fig.* 11. [a] *Per* 34.*l*.2.

III. Ducta CO parallela axi si secetur per subtensam MA in I, & a curva in F, erunt OC, CI, CF continue proportionales. Est quippe [b] PMq ad LIq in ratione duplicata ipsarum PM, LI, seu [c] in ratione duplicata PA, AL, seu OC, CI. Sed PMq, LIq (= DFq) :: PA : AD [d] :: OC : CF. Ergo erit etiam OC ad CF in ratione duplicata OC ad CI; hoc est ∺ OC, CI, CF. [b] *Per* 20.*l*.6. [c] *Per* 4.*l*.6. [d] *Per hanc pr.*

IV. Si in parabola AM ordinatæ PM, pm &c. sint uti seriei naturalis numeri, nempe 1, 2, 3, 4, &c., iisdem respondebunt abscissæ AP, Ap &c. uti eorundem numerorum quadrata, nempe 1, 4, 9, 16 &c.

SCHOLIUM I.

Occasione celeberrimæ hujus parabolæ proprietatis, quod vid. sumtis ordinatis juxta seriem numerorum naturalium abscissæ respondeant in serie quadratorum numerorum; in mentem venit cuidam Geometræ, ut curvam quæreret, in qua sumtis ordinatis juxta seriem item numerorum naturalium, abscissæ respondeant juxta datam polygonorum numerorum seriem, illudque problema Geometris omnibus in diariis Trevoltiensibus Septem. & Octob. A. 1701. *proposuit. Sunt autem numeri* polygoni *progressionum Arithmeticarum ab unitate incipientium summæ; & in specie* triangulares *dicuntur, si differentia terminorum progressionis Arithmeticæ fuerit* 1, quadrati *si differentia fuerit* 2, pentagoni *si* 3, *& ita deinceps. Sic*

Progressio Arithmetica.	1, 2, 3, 4, 5, *&c.*
Numeri Triangulares.	1, 3, 6, 10, 15, *&c.*
Progres. Arith.	1, 3, 5, 7, 9, *&c.*
Numeri Quadrati.	1, 4, 9, 16, 25, *&c.*
Progres. Arithm.	1, 4, 7, 10, 13, *&c.*
Numeri Pentagoni.	1, 5, 12, 22, 35, *&c.*

Id igitur erat prepositum: Curvam invenire in qua positis ordinatis juxta naturalem numerorum seriem, nempe 1, 2, 3, 4, *&c. abscissæ respondeant in serie numerorum triangulorum, nempe uti* 1, 3, 6, 10, *&c. vel in serie numerorum pentagonorum* 1, 5, 12, 22, *&c. vel in alia quacunque data polygonorum numerorum serie. Prima quidem facie inspicienti problema longe alia a parabola quæsita curva videtur; nam si ejus ordinatis naturalem numerorum seriem constituentibus abscissæ respondent juxta seriem numerorum quadratorum, iisdem ordinatis in eadem naturali numerorum serie remanentibus non verosimile videtur in eadem parabola respondere posse abscissas triangulorum numerorum, vel aliam quamvis seriem constituentes. At nihilominus longe*

ali-

aliter se res habet: quaesita curva una eademque est parabola, quamcumque datam polygonorum numerorum seriem servare debeant abscissae ordinatis in serie numerorum naturalium respondentes. Id demonstravit Cl. Carrè in Memor. Acad. Parif. A. 1701., *cujus demonstrationem utpote tironum captui parum accomodatam referre omittimus. Interim duo colligemus: Primum quam parum ejusmodi verisimilitudinis argumentis in rebus geometricis fidendum sit. Alterum: quam noverant Veteres parabolae proprietatem relate ad abscissas juxta seriem numerorum quadratorum, veluti infinitesimam partem esse similium proprietatum relate ad abscissas quamcumque aliam polygonorum numerorum seriem constituentes.*

SCHOLIUM II.

I. PRopositionis hujus ingens est in Physicis usus. Hinc enim discimus, quod si recta AP, Ap, &c. spatia designent a corpore libere per vim gravitatis decidente, respondentes ordinatae PM, pm, &c. denotabunt ejusdem corporis velocitates post percursa spatia AP, Ap &c. juxta Galilaeanam gravitatis hypothesim. In hac enim spatia percursa AP, Ap sunt ut quadrata velocitatum: sed per proposit. sunt eadem spatia seu abscissae AP, Ap, ut ordinatarum PM, pm quadrata. Ergo patet propositum. *Fig.* 11.

II. Sit vas quodcunque BAD liquido quovis plenum; sitque in A foramen per quod contento liquido depleatur. Velocitates exeuntis liquidi eadem semper non sunt, sed diminutis ejusdem in vase altitudinibus eae minuuntur etiam juxta subduplicatam altitudinum rationem, quemadmodum in Hydrostatica demonstratur. Quamobrem si ex vertice A ad axem AP quaevis parabola AM describatur, ejus ordinatae PM, pm &c. altitudinibus AP, Ap &c. veluti abscissis respondentes, liquidi exeuntis velocitates designabunt. *Fig.* 12.

III. Hinc

III. Hinc etiam infertur sive horizontaliter, sive oblique corpora projiciantur, curvam parabolicam descriptum ire. Demonstratur enim in Statica talis natura esse debere eam semitam, ut ejusdem ordinatarum quadrata abscissis proportione respondeant; quæ est parabolæ mox demonstrata proprietas. Et hinc etiam totius Balisticæ fundamenta eruuntur.

PROPOSITIO II.

Fig. 13. *SI in parabola ALM cujus diameter AP, post abscissam AP, & ordinatam PM inveniatur tertia proportionalis GA, erit non tantum quadratum ordinatæ PM æquale rectangulo ex abscissa AP in ipsam AG; sed alterius item cujuscumque ordinatæ IL quadratum æquale erit rectangulo ex sua abscissa AI in eandem AG.*

Quadratum PM æquari rectangulo ex AP in AG patet ex 17. l. 6., cum sint per construct. AP, PM, AG continue proportionales. Est autem (*a*) PMq : ILq :: AP : AI, seu (assumta AG pro communi altitudine) :: AP×AG : AI×AG (*b*); & permutando erit PMq : AP×AG :: ILq : AI×AG. Sed primæ rationis termini sunt æquales; ergo & secundæ æquales erunt. Ergo quadratum ordinatæ IL æquale est rectangulo ex abscissa AI in AG. Q. E. D. Hæc autem constans linea AG (quæ ex vertice A ordinatis parallela duci solet) *Latus rectum*, vel *Parameter* appellatur.

(a) *Per præc.*
(b) *Per 1. l. 6.*

COROLLARIA.

I. DUcta ex G recta GO parallela diametro AP, productisque ordinatis MP, LI, donec ipsi GO occurrant in O & N, erit PMq = rect. GP, & ILq = rect. GI, & sic deinceps. Recta GO ea rectangula GP, GI terminans dicitur parabolæ *Directrix*. Atque ob ejusmodi æqualitatem inter ordinatarum quadrata & respondentia re-

rectangula lateri recto applicata, parabolæ nomen huic conicæ sectioni datum est, quod similitudinem vel æqualitatem notat.

II. Præterea si bisecta GA in C, ex C recta CR ducatur eidem AP parallela occurrens rectis NI, OP in F & R, erit quadratum PM duplum rectanguli CP, & quadratum IL duplum rectanguli CI; & sic porro omnium ordinatarum quadrata dupla erunt respondentium rectangulorum, quæ a recta CR terminantur: hinc vocari hæc recta consuevit parabolæ *Subdirectrix*.

III. Hinc geometrice poterit determinari num datum punctum D ad parabolam pertineat, necne. Demittatur enim ex D ad diametrum AP perpendicularis DQ, & fiat QK æqualis parametro AG. Super AK describatur semicirculus; is si transibit per D, erit illud punctum in parabola. Nam [a] est DQq = rect. AQ*QK seu = rect. AQ*AG, hoc est = rect. ex abscissa in parametrum.

[a] *Per cor.* 1. *pr.* 17. *l.* 6.

SCHOLIUM.

Data parametro, describi facile poterit parabola infinita illius puncta determinando. Sit enim parameter AK in directum axi AX posita, cui ex A perpendicularis sit AV indefinite versus V producta. Tum centris ad libitum in KX assumtis, circino semper usque ad K aperto describantur semicirculi KHC, KEL, KIM, KVX &c. rectam AV in punctis H, E, I, V, rectam vero AX in C, L, M, X intersecantes. Ex punctis C, L, M, X rectæ ducantur CB, LD, MF, XG ipsi AV parallelæ, & ejus partibus AH, AE, AI, AV respective æquales. Dico per puncta A, B, D, F, G parabolam transire, cujus parameter AK. Est enim [b] Haq seu [c] CBq = rect. CA*AK; item AEq seu LDq = rect. KA*AL; & ita porro ordinatarum MF, XG quadrata rectangulis

Fig. 14.

[b] *Per cor.* 1. *pr.* 17. *l.* 6.

[c] *Per constr.*

gulis respondentium abscissarum AM, AX in parametrum AK ductarum æqualia sunt. Ergo puncta A, B, D, F, G sunt in parabola.

Fig. 15. Sed lubet ulterius aliam parabolæ descriptionem hic exhibere a quodam regularum motu dependentem, cum demonstrata parametri proprietate ea etiam innitatur. Sit itaque AC axis vel diameter describendæ parabolæ, ejus vertex A, & AB parameter ipsi AC applicata ad eum angulum, quem ordinatæ cum eadem AC efficere debent. Per B ducatur BL ipsi AC parallela; tum supponatur circa verticem A veluti centrum immobile circulariter moveri regulam AH; cum interim alia regula DE super AB ita movetur, ut semper sibi & eidem AC parallela maneat; ac interim abscindat ex AB producta, si opus est, portionem AD æqualem ipsi BF, seu rectæ quam ex BL abscindit eodem tempore prior regula AF. Dico curvam continuis ejusmodi regularum AF, DE intersectionibus descriptam esse parabolam. Sit enim e. g. M unum ex ejusmodi punctis, ex quo ducatur MP ipsi AB parallela occurrens AC in P. Est quadratum PM ad rectangulum PAB [a] in ratione composita ex PM ad AB, & ex PM iterum ad AP; seu (ob PM = AD, & AP = DM) in ratione composita ex AD ad AB, & ex AD iterum ad DM, seu AB ad BF [b]. Ergo cum sit quadratum PM ad rectangulum PAB in ratione composita ex AD in AB & ex AB ad BF, erit [c] idem quadratum PM ad rectangulum PAB, ut AD ad BF. Sed ex hyp. est AD = BF; ergo etiam quadratum PM æquale erit rectangulo PAB ex abscissa nempe AP & parametro AB. Cumque eadem sit pro singulis ejusmodi intersectionum punctis demonstratio, patet descriptam curvam esse parabolam.

[a] *Per* 23. *l.* 6.

[b] *Per* 4. *l.* 6.

[c] *Per def.* 5. *l.* 6.

PRO-

PROPOSITIO III.

Fig. 16.

IN parabola ANE rectangulum ex summa duarum semiordinatarum MN, DE in differentiam earundem aequatur rectangulo ex parametro AC in differentiam abscissarum AM, AD.

Semiordinata DE producatur ad alteram parabolæ partem in F; tum ex N ducatur NH diametro AD parallela occurrens ordinatæ DE in H. Jam patet FH esse semiordinatarum MN, DE summam, & HE earumdem differentiam; quemadmodum MD est abscissarum DA, MA differentia. Itaque demonstrandum est rectangulum FHE rectangulo ex MD in AC æquari. Id vero ita demonstratur.

DEq = rect. DAC, & MNq = rect. MAC [*a*]. Ergo DEq − MNq = rect. DAC − MAC. Est autem DEq − MNq idem ac DEq − DHq, seu idem ac rectangulum FHE [*b*]; & rect. DAC − rect. MAC idem ac DM in AC [*c*]. Ergo erit rect. FHE = DM×AC. Quod erat demonstrandum.

[a] *Per 2. hujus. cap.*
[b] *Per 5. l. 2.*
[c] *Per 1. l. 2.*

COROLLARIA.

I. HInc parabolæ parameter AC est ad summam duarum ordinatarum MN, DE, ut earundem differentia HE ad differentiam abscissarum DM.

II. In parabola FAE quævis rectæ TV, NH diametro AD parallelæ, & ordinatæ FE veluti basi in V & H occurrentes, sunt inter se ut rectangula FVE, FHE. Ducta enim TX parallela FE, est rect. DX in AC, seu VT×AC = rect. FVE, & rect. MD×AC seu NH×AC = rect. FHE [*d*]. Ergo erit rect. FVE : rect. FHE :: VT×AC : NH×AC seu [*e*] :: VT : NH.

[d] *Per hanc pr.*
[e] *Per 1. l. 6.*

III. Producta NM in S, erit rect. FVE ad rect. SKN,

SKN, ut TV ad TK. Nam quemadmodum rect. FVE est æquale rectangulo VT in AC; ita etiam rect. SKN est æquale rectangulo TK in AC; proindeque erit rect. FVE : SKN :: VT×AC : TK×AC [a] :: VT : TK.

[a] Per 1.l.6.

IV. Producta ordinata TX, si ex ejus punctis extra parabolam agantur parallelæ diametro ZN, GE curvæ occurrentes in N & E, erunt hæ quoque ut rectangula QZT, QGT. Ductis enim ex N & E ordinatis NM, ED, est NMq = rect. MAC, DEq = rect. DAC, & XTq = rect. XAC [b]. Ergo MNq — XTq, seu XZq — ZTq, seu [c] rect. QZT = rect. MX×AC seu = rect. NZ×AC. Similiter demonstratur rect. QGT æquari rectangulo EG×AC. Igitur erit rect. QZT : rect. QGT :: rect. NZ×AC : rect. EG×AC :: [d] NZ : GE. Ulterius producta MN in I, erit rect. QGT [= rect. EG×AC] ad rect. SIN [= rect. IE×AC], ut EG ad EI.

[b] Per 1. hujus cap.
[c] Per 6.l.2.
[d] Per 1.l.6.

SCHOLIUM.

Parabolæ proprietatem hac propositione demonstratam admiratione valde dignam reputat Sturmius in sua Mathesi enucleata, eamque veteribus ignotam nec a Cartesio observatam dicit. At rem levem admiratus est vir cæteroqui clarissimus; ea enim proprietas tam prono alveo ex altera parabolæ proprietate præcedenti propositione demonstrata fuit, ut qui eam noverit, hanc etiam novisse videatur. Falsum præterea est eam veteribus ignotam fuisse, cum revera in Pappi Alex. Collect. lib 4. prop. ultima occurrat, & haud dubie etiam apud alios veteres Conicorum Scriptores. Propositionis tamen enunciatio apud Pappum est ejusmodi. Sit recta linea FE positione & magnitudine data, & ad rectos angulos ipsa NH. Sit autem rectangulum FHE æquale ei quod data recta linea ex NH continetur, Dico punctum N positione parabolam contingere.

PRO-

PROPOSITIO IV.

D*Ata parabolæ ad datum in ejus perimetro punctum tangentem ducere.* *Fig. 17.*

Duplex est casus. Vel enim datum punctum est in sectionis vertice, vel non. Si primum; ducta ex eodem vertice ordinatis HE, MP parallela AB, tangens erit. Si enim ea curvæ alicubi præter A occurreret, ex una tantum diametri parte chordam efficeret; proindeque diameter non bifariam secaret omnes parallelas ordinatis intra sectionem positas, contra id quod in Schol. def. 3. demonstravimus.

Sit modo datum punctum extra sectionis verticem, puta in M. Ex M ad axem vel diametrum AP ordinetur MP abscissam secans AP. Tum diameter ultra verticem producatur in T, donec AT abscissæ AP æqualis sit: jungatur tandem TM. Dico hanc quæsitam esse tangentem, nullibi videlicet præter M sectioni occurrere.

Demonst. Ducta parametro AN ad diametrum perpendiculari, sit RG subdirectrix, cui ordinata MP producta occurrat in G. Sumatur præterea in recta TM ubilibet punctum D, ex quo ad subdirectricem usque ducatur DF ipsi GM parallela. Cum sit [*a*] PT dupla ipsius AP, erit [*b*] triangul. GPT = rect. RP; proindeque triangulum LTH rectangulo RH majus erit. [Prius enim deficit ab uno æqualium, nempe a triangulo GTP quadrilineo GLHP, seu minori spatio quam rectangulum FP, quo rectangulum RH deficit ab altero æqualium, nempe a rectangulo RP). Præterea est PMq duplum rectanguli RP [*c*]; ergo & duplum erit trianguli GTP. Ulterius PMq : HDq :: [*d*] triang. PTM : triang. HTD :: triang. PTC : triang. HTL. Ergo quemadmodum PMq trianguli PTG duplum est, ita HDq trianguli HTL duplum erit. Sed HEq [*e*] duplum est

[a] *Per constr.*
[b] *Per 41. l. 1.*
[c] *Per cor. 2. p. 2. hujus.*
[d] *Per 19. & 20. l. 6.*
[e] *Per cor. 2. p. 2. hujus.*

est rectanguli RH. Ergo cum triangulum HTL majus sit rectangulo RH, erit etiam HDq majus HEq; & recta HD major recta HE. Similiter si punctum desumatur infra M, demonstrabitur hd major he. Sed puncta E, e sunt in sectione; ergo D, d, & quæcunque alia rectæ TM præter M erunt extra sectionem. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIA.

I. CUm sit PMq duplum trianguli GPT, ut ex demonst. liquet, erit idem PMq æquale rectangulo GP*PT; proindeque [a] erit GP: PM :: PM : PT. Hinc alia eruitur methodus tangentem TM ad punctum parabolæ M ducendi, nempe si producta ordinata PM usque ad G, inveniatur [b] tertia proportionalis post GP, PM; ea enim si transferatur in axe vel diametro ex P in T, juncta TM tangens erit.

[a] *Per* 17.*l*.6.

[b] *Per* 11.*l*.6.

II. Si in diametro ex P sumatur PV æqualis PG, seu RA dimidio lateris recti, jungaturque VM, erit hæc tangenti TM normalis. Nam ob PV = GP, est PM media proportionalis inter PV & PT; ideoque angulus TMV rectus, uti ex 8. l. 6. facile colligitur. Igitur excitabitur etiam ad punctum M tangens, si posita PV æquali semiparametro, jungatur VM, & huic ex M perpendicularis MT; hæc quippe erit tangens.

III. Ex M ducatur MB axi AP parallela, & tangenti verticali AC occurrens in B: dico AC esse ipsius AB dimidiam. Est enim (c) PM : AC :: PT : AT. Sed per constructionem PT dupla est AT; ergo etiam PM seu AB ipsius AC dupla erit. Igitur si bisecta AB in C, ex M per C recta MC ducatur axi in T occurrens, ea erit tangens.

[c] *Per* 4.*l*.6.

IV. Portio axis vel diametri PT inter ordinatam PM, & tangentem MT intercepta dicitur

Sub-

Subtangens; PV vero inter ordinatam PM, & tangenti normalem MV comprehensa dicitur *Subnormalis*. Itaque in parabola erit subtangens abscissæ dupla; subnormalis vero paramenti subdupla.

V. Cum sit subtangens TP abscissæ AP dupla *Fig.* 17.
non tantum [*a*] triangulum GPT rectangulo RP [a] *Per*
æquatur; sed & triangulum MTP rectangulo PB 41.*l*.1.
æquale erit. Hinc si iisdem ut supra manentibus ducatur EF tangenti MT parallela, sectioni in E, & F, & axi in V occurrens; atque ex punctis *Fig.* 18.
E & F ordinatæ ducantur EH, FN rectæ BM, si 19.
opus est, productæ occurrentes in Q & G: erit etiam triangulum EVH rectangulo HB æquale; & triangulum FVN æquale rectangulo NB. Nam ob similitudinem triangulorum PMT, HVE, est
[*b*] triangulum PTM : triangulum HVE :: PMq. [b] *Per*
HEq :: [*c*] PA : HA :: [*d*] rect. PB : rect. HB. 19. &
Ergo cum triangulum PTM æquale sit rectangu- 20.*l*.6.
lo PB, erit etiam triangulum HVE = rectang. [c] *Per*
HB. Et similiter demonstrabitur triangulum NVF 1.*huj*.
rectangulo NB æquari. In demonstratione suppo- [d] *Per*
suimus rectam AN perpendiculariter suis ordina- 2.*l*.6.
tis occurrere; ac si oblique iisdem occurrat, illa quoque locum habet.

SCHOLIUM.

QUæ de angulis contactus circularibus prop. *Fig.*20.
16. l.3. & suis coroll. demonstrata sunt, angulis quoque contactus parabolicis quadrant. Si enim ad axem AV paramento AC descripta parabola AFD, describatur insuper super AG parametro AC æquali semicirculus AKG, hic communem cum parabola AFD infinitesimum arcum AF habebit; eritque angulus contactus circularis angulo contactus parabolico æqualis. Assumpto
enim in parabola arcu AF infinite exiguo, ordi- [e] *Per*
nataque FE, erit [*e*] FEq. = rect. EA × AC = 2.*huj*.

(a) *Per constr.* rect. EA × AG (ob AG, AC (*a*) æquales). Est autem rectangulum EA × AG idem ac rectangulum EA × EG ob infinite exiguam, adeoque & contemptibilem AE: ergo erit idem FEq = rect. AE × EG. Sed quæ ex E ordinatur ad circulum AKG potest idem rectangulum AE × EG; ergo eadem EF parabolæ AFD, & circulo AKG convenit; ideoque punctum F ad utramque curvam pertinebit, omnesque pariter ordinatæ usque ad verticem A in utraque communes erunt, & consequenter arcus EF communis. Similiter si ad eundem verticem A hyperbola & ellipsis describeretur eodem omnes parametro AC, arcus EF omnibus his curvis communis erit, ut suis locis demonstrabitur. Quæ igitur de angulo contactus circulari demonstrata sunt, angulis contactuum sectionum conicarum conveniunt; quorum illud præcipuum est omni adsignabili acuto eos esse minores, magnitudinisque esse infinite exiguæ.

PROPOSITIO V.

Fig. 18. I*Isdem ut supra manentibus, quævis recta MK diametro vel axi AL parallela, est & ipsa diameter bifariam secans EF, AX tangenti MT parallelas. Suntque pariter ordinatarum EI, AR quadrata ut ejusdem diametri MK ex vertice M abscissæ MI, MR.*

[b] *Per cor.* 5. *pr. præc.* *Prior pars*. Triangulum FVN (*b*) = rect. NB, & triang. EVH = rect. HB. Ergo si a triangulo FVN auferatur triangulum EVH, & a rectangulo NB auferatur rectangulum HB, erunt reliqua æqualia, hoc est, quadrilineum HEFN = rect. NQ. Ablato item ab his æqualibus, communi trapezio NHEIG, erunt reliqua triangula GIF, EIQ æqualia. Sed sunt eadem (*c*) similia; ergo erunt inter se ut quadrata (*d*) laterum homologorum FI, IE. Ergo hæc quadrata; tum latera EI, IF erunt æqualia. Eodem modo demonstrabitur re-

(c) *Per* 27. *l* 1. & 4. *l*. 6.
(d) *Per sch. pr.* 20. *l*. 6.

rectam AX, & quasvis alias tangenti MT parallelas a recta MK bifariam secari; eritque proinde MK respectu earum ordinatarum diameter.

Fig. 19.

Quod si recta EF tangenti parallela axi AN infra verticem occurrat, eadem demonstratio parum immutata obtinet. Triangulum FVN = rect. NB [a]: ergo ablato utrinque communi quadrilineo VIGN, erit triangulum GIF = quadrilineo AVIB, seu = quadril. HVIQ + rect. HB, seu = eidem quadril. HVIQ + triang. EVH (b), seu = soli triangulo EIQ. Igitur cum duo triangula EIQ, IGF, sint etiam [c] similia, erunt quadrata EI, IF, tum latera ipsa EI, IF æqualia. Quod si AX tangenti MT parallela diametro AN occurrerit in vertice A, jam patet (d) triangulum LAX rectangulo LB æquari, & ablato communi quadril. ARKL æquari etiam triangula ARB, KRX; proindeque ob eorumdem similitudinem, ARq. = RXq. & AR = AX.

(a) Per coroll. 5. præc.
(b) Per idem cor.
(c) Per 27. l. 1. & 4. l. 6.
(d) Per cor. 5. præc.

Secunda pars. Sit ex vertice A recta ARX tangenti MT parallela, diametro MK occurrens in R, & curvæ in A & X ut ante; tum ex X ordinetur XL; iisdemque ut supra manentibus, est BM = TA, cum utraque eidem AP (e) æquetur. Ergo triangula TCA, CMB cum sint etiam similia (f) erunt & æqualia. Utrique igitur addito communi quadrilineo ACMR, erit parallelogrammum TMRA = triang ARB, seu [cum sit AR = RX] = triangulo KRX. Similiter si æqualibus triangulis TCA, CMB addatur commune trapezium ACMGN, fiet quadrilineum TMGN = rect. NB, seu = triang. VFN. Ablato itaque communi quadrilineo VIGN, erit reliquum parallelogrammum VTMI = reliquo triang. IGF. Est ergo parallelogr. TARM : parallelogr. TVIM :: triang. KRX : triang. GIF. Sed parallelogr. TARM : parallelogr. TVIM :: MR : MI (g); & triang. KRX : triang. GIF [ob eorundem similitudinem] :: RXq: IFq. Ergo (h) MR : MI :: RXq:

Fig. 18. 19.

(e) Per 34. l. 1. & 4. hujus.
(f) Per 27. l. 1. & 4. l. 6.
(g) Per 1. l. 6.
(h) Per 11. l. 5.

RXq: IFq:: ARq:: EIq. Eadem est pro ceterarum ordinatarum ad diametrum MG quadratis demonstratio. Liquet ergo propositum.

COROLLARIA.

I. QUæcunque igitur respectu axis vel diametri principalis, ejusque ordinatarum superioribus propositionibus sunt demonstrata, cuique alteri diametro, ejusque ordinatis etiam quadrant. Quemadmodum igitur respectu diametri principalis subtangens PT dupla est abscissæ AP; ita & relate ad diametrum MG erit subtangens RB abscissæ MR dupla. Hinc alia emergit ducendæ ex dato puncto M tangentis ad parabolam methodus. Ducta videlicet ex M, diametro MG, quæ tangenti verticali AB occurrat in B, fiat MR æqualis MB, agaturque per verticem A recta RA: quæ huic ex puncto M ducitur parallela MT erit tangens ad M.

IJ. Et quemadmodum latus rectum, seu parameter ad diametrum principalem AN, ita ad secundariam diametrum MK determinabitur, inveniendo tertiam proportionalem post quamvis abscissam MI, & ejus ordinatam EI. Eruntque ejusmodi ordinatarum quadrata æqualia rectangulis ex respondentibus abscissis in latus rectum.

III. Ac tandem quod prop. 3. relate ad diametri principalis ordinatas demonstratum est, idipsum hic obtinet respectu ordinatarum ad alias diametros, rectangulum vid. ex summa duarum semiordinatarum in differentiam earundem æquari rectangulo ex parametro in differentiam abscissarum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 21. *ISdem positis quæ in antecedenti propositione, si in axe AP ex vertice A sumatur AF æqualis quartæ parti parametri ejusdem axis AP, erit FT*

[por-

[portio nempe axis inter punctum F, & tangentem MT intercepta] quater sumta aequalis paramento diametri secundariae MR.

Ducta tangente verticali AC, quae tangenti TM occurrat in C, agatur ex C ad F recta CF; tum ex vertice A tangenti MT parallela ducatur AR suae diametro occurrens in R. Cum sit subtangens TP abscissae AP, vel AT dupla, erit (*a*) TM dupla TC, & PM ipsius AC adhuc dupla; proindeque (*b*) erit PMq. = 4 ACq., seu (quod idem est) erit PMq. quadrati AC quadruplum. Sed est etiam (*c*) PMq: = rectang. PA × 4 AF: ideoque idem PMq. quadruplum erit rectanguli PA × AF, seu rect. TA × AF. Ergo cum & quadrati AC, & rectanguli TAF quadruplum sit idem PMq., erit ACq. = rect. TAF. Ergo (*d*) erit angulus TCF rectus; & (*e*) TCq. = rectang. AT × TF, seu = rectangul. MR × TF. Et quadruplicando terminos erit TMq. seu ARq. = rect. MR × 4 TF. Igitur cum sit AR ad diametrum MR ordinata, & MR correspondens abscissa, erit 4 TF ejusdem diametri parameter.

(a) *Per* 4.*l*.6.
(b) *Per cor*.3.*pr*. 4.*l*.2.
(c) *Per* 2.*hujus*.
(d) *Per* 8.*l*.6.
(e) *Per coroll*.2. *ejusd*.

COROLLARIA:

I. Ex F ad M ducatur recta FM; erit etiam haec quater sumta ejusdem diametri MR parameter. Tum si ex altera parte verticis A sumatur in axe recta AB ipsi AF aequalis, agaturque ex B recta BD ordinatae PM parallela, cui occurrat RM producta in D; erit adhuc PB vel MD quater sumta ejusdem diametri MR parameter. Nam cum sit angulus TCF rectus; erit etiam (*f*) rectus alter FCM; hinc duo trigona FCT, FCM cum habeant latus FC commune, latera vero TC, CM aequalia, aequales etiam erunt (*g*) bases FT, FM; proindeque 4FT = 4FM. Item TF = TA + AF = (*h*) AP + AF (*i*) = AP + AB = PB

(f) *Per* 13.*l*.1.
(g *Per* 4 *l*.1.
(h) *Per cor*. 1. *p*. 4.*hujus*.
(i) *Per constr*.

vel MD. Ergo tandem 4PB vel 4MD erit diametri MR parameter.

II. Quemadmodum ostensum est rectam FM rectæ PB æquari, ita etiam ubilibet inclinata ex puncto F ad curvam alia Fm, & ex m ordinata mp demonstrabitur Fm rectæ pB æqualem esse, ducta videlicet prius ex m tangente usque ad axem. Et hinc infinita puncta facile poterunt determinari per quæ transeat parabola, inclinatis videlicet ex F. rectis FM, Fm respondentibus BP, Bp æqualibus.

Fig. 22. III. Hinc etiam continuo motu ita describetur parabola, cujus data sit parameter. Assumta AR pro axe, & A pro vertice, sumantur utrinque ex A, AF, AB singulæ parametri quadranti æquales. Tum firmetur in B regula DG perpendiculariter secans axem BR. In alterius regulæ EC extremitate C filum alligetur, altero sui extremo puncto F adhærens; sitque ejus longitudo = EC = AR + AB. Præterea stylo ad regulam EC applicato, puta in M, regula ipsa EC juxta alterius DG ductum sibi semper & axi BR parallela promoveatur: dico parabolam in ejusmodi motu a stylo describi. Ducta enim ex M ad axem ordinata MP, patet fili longitudinem FM æquari BA + AP, cum reliqua fili pars MC rectæ PR sit æqualis. Igitur [*a*] punctum M erit semper in parabola.

[a] *Per corol. I. hujus.*

IV. Hinc etiam infertur summam FM (quæ nempe ex F ad curvam ubilibet inclinatur) & MC, (quæ vid. ex eodem puncto M axi AR parallela ducitur usque ad ordinatam RQ) constantem esse, ejusdemque ubique magnitudinis. Posita enim regula EC in ec, & stylo in m, erit longitudo fili Fm = BA + Ap = Bp, cum reliqua fili pars mc rectæ pR sit æqualis. Igitur Fm + mc = BR: idemque cum semper accidat, ubicumque spectetur punctum m, patet propositum.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Isdem positis erunt anguli FMT, RMQ, seu qui fiunt ab inclinata ex F ad curvam, nempe FM, & parallela axi ex eodem puncto M, nempe MR, cum tangente TMQ ex eodem puncto M, erunt, inquam, æquales. *Fig. 21.*

Nam (*a*) cum sit FM æqualis FT, erit triangulum FTM isoscele; proindeque erunt anguli FTM, FMT æquales. Sed (*b*) ob diametrum MR axi AP parallelam est (*c*) externus angulus RMQ interno MTF, ac proinde etiam FMT æqualis. Ergo &c.

[a] *Per coroll. 1. præc.*
[b] *Per hyp.*
[c] *Per 27. l. 1.*

COROLLARIA.

I. Hinc in speculis parabolicis, quæ concavitate sua ita Soli obvertuntur, ut ejus radios excipiant axi parallelos, veluti GH, RM, rm &c., in punctum F post reflexionem eosdem colligi necesse est, ibidemque ob eorum concursum ignem excitari. Constat siquidem ex Catoptrica lucis radios ita reflecti, ut anguli incidentiæ reflexionis angulis sint æquales; proindeque radios omnes RM, rm post incidentiam in M ad punctum F concurrere, cum ibidem & non alibi fiant anguli reflexionis angulis incidentiæ æquales. Et hinc punctum F parabolæ *Focus* dici consuevit, *Umbilicus* etiam ab aliis appellatus. Linea BD ordinatis parallela, ad quam terminantur MD, md inclinatis FM, fm æquales, *Linea sublimitatis* dicitur.

II. Si lumen in foco F collocatum hinc radios suos FH, FM, Fm &c. ad speculi superficiem mittat, iidem post reflexionem paralleli incedent per lineas HG, MR, mr &c.; quod ita angulos reflexionis incidentiæ angulis æquales efficiant. Atque hac ratione candelæ lux ad immen-

sam fere distantiam eadem semper vi propagari poterit, cum ob radiorum reflexorum perallelismum lux ad majora spatia non dissipetur, sed eadem densitate incedat semper.

SCHOLIUM.

PLura sunt quæ circa parabolæ focum demonstrant Geometræ: principaliora hic subjiciemus ex duabus superioribus propositionibus dependentia, quæ, si placet, prætereant nunc tirones.

Fig. 23. I. Si rectæ HP, MD ita ad parabolæ convexitatem incidant, ut ad focum F convergant, ductis ex P & M tangentibus PT, MT; item PG, ML axi AC parallelis, erunt anguli HPI, GPT æquales; item anguli DMV, LMT æquales. Productis enim intra curvam GP in Q, & HP usque ad F, erunt per hanc prop. anguli QPI, FPT æquales. Sed angulus QPI = ang. GPT, & angulus FPT = angulo HPI (*a*): ergo erunt anguli HPI, GPT etiam æquales. Similiter demonstratur æquales esse angulos DMV, LMT. Hinc patet quod si in convexam parabolici speculi superficiem radii HP, MD &c. incidant ad focum F convergentes, post reflexionem axi paralleli incedunt juxta lineas PG, ML.

[a] *Per* 15. *l.* 1.

Fig. 24. II. Si ex foco F ad axem ordinetur FM, & ex M tangens ducatur MT tangenti verticali AB occurrens in B, sitque parameter AV; erit FM semiparametro æqualis; & tangentis verticalis pars AB ejusdem parametri quadranti æqualis. Nam cum sit FA = $\frac{1}{4}$ AV, & ob MT tangentem sit (*b*) TF ipsius AF dupla, erit eadem TF semiparametro æqualis; & FM quæ (*c*) ipsi TF æquatur, eidem semiparametro æqualis erit. Præterea est (*d*) FT : TA :: FM : AB; ergo FM ipsius AB dupla; ergo AB = $\frac{1}{4}$ AV; ergo tres AT, AF, AB æquales.

[b] *Per cor.* 4. *pr.* 4. *huj. c.*
[c] *Per cor.* 1. *p.* 6. *huj. c.*
[d] *Per* 4. *l.* 6.

III. Iisdem positis & ex foco F ad quodvis parabolæ

bolæ punctum P inclinata recta FP, ordinataque ex P ad axem recta PD tangenti TM occurrente in G, erit FP rectæ DG æqualis. Cum enim FT, FM [*a*] æquales sint, æquabuntur etiam GD, DT ob similitudinem triangulorum FTM, DTG. Sed est [*b*] FP eidem DT æqualis; ergo & FP, DG æquales erunt. (a) *Per cor.2.p. 6.huj.c.* (b) *Per cor.1.p. 6.huj.c.*

IV. Sit triangulum isoscele FTM rectangulum in F, ejusque lateribus TF, TM productis rectæ DG, dg interjiciantur ipsi FM parallelæ; tum ex F in ipsis DG, dg rectæ applicentur FP, Fp iisdem DG, dg respective æquales: dico per puncta P, p parabolam transire, cujus vertex A, focus F, parameter ipsius FM dupla.

V. Si ex puncto parabolæ M ad quod spectat tangens MD, eidem perpendicularis ducatur MV axi occurrens in V, & ex V ad inclinatam ex foco FM sit perpendicularis VE: erit EM subnormali KV, seu dimidio parametri æqualis. In duobus enim triangulis VEM, VKM duo anguli ad K & E utpote recti sunt æquales; æquales item duo VME, KVM: (nam ducta MS parallela axi, anguli SMG, FMD [*c*] æquales sunt, quare ab æqualibus VMG, VMD ablatis æqualibus SMG, EMD, reliqui VMS, VME æquales sunt: est autem VMS = KVM (*d*); ergo æquales etiam erunt VME, KVM). Est præterea latus VM utrique triangulo commune; ergo (*e*) erunt latera KV, EM æqualia; proindeque EM (*f*) semiparametro æquale. *Fig.* 25. [c] *Per 7.huj.c.* [d] *Per 27.l.1.* [e] *Per 26.l.1.* [f] *Per cor.4.p. 4.huj.c.*

VI. Si ex duabus parabolæ punctis P, M ad focum F rectæ ducantur PF, MF; tum ex iisdem punctis tangentes PT, MO, axi occurrentes in T, O, & ad invicem in C; erit angulus qui fit in foco a duabus inclinatis PF, MF, scilicet angulus PFM, ejus qui fit ex tangentibus PC, MC, seu anguli PCM duplus. Sunt enim (*g*) rectæ OF, FM æquales; igitur & æquales (*h*) anguli FMO, FOM: & ob eandem rationem æquales [g] *Per cor.1.p. 6.huj.c.* [h] *Per 5.l.1.*

an-

anguli FPT, FTP. Est autem (*a*) angulus PFV
[a] *Per* utpote externus, duobus FPT, FTP æqualis, ac
32.*l*.1. proinde unius PTF vel OTC duplus, & similiter angulus VFM anguli O duplus. Ergo totus PFM duorum simul OTC, COT, vel unius PCM
[b] *Per* (*b*) duplus erit.
32.*l*.1. VII. Hinc si ex extremitatibus ejusdem rectæ QM per focum F transeuntis duæ tangentes ducantur QD, MD, angulus qui ab his fit in D, rectus erit. Nam per superius cor. angulus QDM duorum simul QFV, VFM dimidius est: sed hi
[c] *Per* (*c*) duorum rectorum summam constituunt; ergo
13.*l*.1. angulus QDM unus rectus erit.
Fig.26. VIII. Iisdem positis, ipsa QM erit parameter diametri DLY bifariam suam ordinatam QM secantis in N. Cum enim angulus QDM rectus
[d] *Per* sit, per tria puncta Q, D, M (*d*) semicirculus
31.*l*.3. transibit, cujus centrum N, & radii ND, NQ, NM. Est præterea ND, utpote subtangens, abscissæ NL dupla, seu (ducta tangente LX) dupla ipsius FX. Ergo cum QM & ipsius ND dupla sit, erit ejusdem FX quadrupla; ac propter-
[e] *Per* ea (*e*) erit eadem QM diametri LY parame-
6.*huj*.*c*. ter.

IX. Quod si ex D ad F jungatur recta DF, hæc erit ad QM perpendicularis. Juncta enim
[f] *Per* FL, hæc (*f*) ipsi FX est æqualis; unde & DN
cor.1. *p*. ipsius FL dupla quoque erit. Quum igitur tres
6. *huj*.*c*. rectæ DL, LF, LN sint æquales, super DN de-
[g] *Per* scriptus semicirculus transibit per F; & angulus
31. *l*.3. DFN (*g*) erit rectus; tum (*h*) FDq. = rect.
[h] *Per* QFM.
cor.1.*pr*. X. Vertex vero anguli recti QDM a tangenti-
8.*l*.6. bus QD, DM facti in recta sublimitatis BV re-
[i] *Per* perietur. Est enim FL = LD, uti FA = AB.
cor.1.*p*. Atqui solius lineæ sublimitatis hæc est proprietas
6.*huj*.*c*. (*i*). Ergo punctum D ad eam lineam pertinebit.

SCHO-

SCHOLIUM II.

I. EX *demonstrata in hac propositione 7. angulorum FMT, RMQ æqualitate facile colligitur Tubas Stentorianas aptissimas esse ad promovendum per longa intervalla sonum, si ex parabolico corpore, veluti NMKL construantur, in cujus foco C loquentis os constituatur. Ex hoc enim puncto C radii phonici CK, CL, CM, CN exeuntes, a punctis parabolæ K, L, M, N ita repercutientur, ut incidentiæ & reflexionis anguli æquales fiant; proindeque radii reflexi per lineas KO, LP, MR, NS (a) axi BC parallelas incedendo, per ampliora jugiter spatia sonum non dissipabunt, sed veluti collectum eadem vi & densitate ad ingens intervallum poterunt promovere.* Fig. 21. Fig. 27. [a]Per pr.7.

II. Vice versa si auris in foco C collocetur, poterit hic excipere loquentium in magna etiam distantia submissas voces, cum hæ versus illud punctum veluti collectæ & condensatæ maxime intendantur, quemadmodum lux. Hinc instrumenta quædam excogitata sunt corniculi AADDB instar, quibus surdastris auxiliamur, veluti senibus perspicillorum ope. Anterior horum pars AA latior ceteris est, superficiemque AD, AD parabolicam habent, cujus focus in C. Hic minoris diametri tubus recurvus adnectitur, in altera extremitate hiatum admodum angustum B meatui auditorio aptandum habens. Sonus in corniculi concavam superficiem veluti per rectas parallelas incidens, ex eadem ad focum C reflectitur ac veluti colligitur, ubi ita condensatus per tubum recurvum ad meatum auditorium transit, sonumque adeo intensiorem reddit. Fig. 28.

III. Sed non tantum lux & sonus parabolicorum speculorum ope ad magna intervalla diffunditur, sed & ipsa comburendi vis ad ingentes etiam distantias poterit propagari. Sit enim imprimis tubus parabolicus A versus verticem truncatus, ita ut ejus focus Fig. 29.

D extra

D extra tubum cadat. Tum ultra punctum D exiguus alter tubus parabolicus B constituatur similiter versus verticem truncatus, axem communem cum tubo A, ac communem etiam focum D habens. Tubus A Soli expositus quos recipit radios parallelos, omnes in punctum D reflectet & colliget [a]: hi vero contrario situ ex foco D in interiorem tubuli B superficiem incidentes, axi paralleli post reflexionem [b] incedant omnes necesse est. Cum autem non tantum in puncto mathematico D ustio fiat, sed aliquantulum etiam remote a D, ubi vid. radii inveniuntur constipatiores, vegetiores & quasi igniti; poterunt iidem radii hujus tubuli ope eundem constipationis & densitatis gradum per ingens intervallum conservare, atque ita per idem comburendi vim diffundere.

[a] *Per cor.* 1. *p.* 7. *huj. c.*

[b] *Per cor.* 2. *p.* 7. *huj. c.*

Quæ hac ratione comburendi vis diffunditur, in linea semper juxta speculorum communem axem exercetur, etsi per ingens intervallum. At eadem quoque urendi virtus ad datum quemvis locum utcunque ab ea axis directione remotum poterit transferri. Si nempe ante focum D *aliud exiguum speculum parabolicum convexum* DB, *focum in idem* D *habens, constituatur, & circa quod punctum* D *libere possit moveri. Tunc enim si locus datus, ubi nempe comburendi vis debet transferri, sit in P, satis est si circa punctum D exiguum speculum DB ita revolvatur, ut ejus axis ad idem punctum P vergat & dirigatur. Solis quippe radii in concavam prioris superficiem paralleli incidentes, ad focum* D *[c] dirigentur, & vergent omnes: sed cum ita convergentes speculi* DB *convexa superficie accipiantur, necesse est ut jam plurimum densati reflectantur paralleli omnes [d] ad speculi* DP *axem, ac proinde comburendi vim versus punctum* P *transferant ad quamcumque distantiam.*

Fig. 30.

[c] *Per cor.* 1. *p.* 7. *huj.*

[d] *Per n.* 1. *sch. pac.*

Atque ita intelligi potest, quod plures fide digni Auctores tradunt, Archimedem scilicet Romanorum naves prope Syracusam, & Proclum Vitaliani classem

sem prope Byzantium combussisse. Non equidem puto ejusmodi comburendi vim tantam esse, quanta in ipso residet foco, ubi est perfecta radiorum unio; sed eam solum quae iisdem radiis plurimum densatis, & ad perfectam unionem jam properantibus convenit; quae certe tanta esse potest, ut viventium, aliorumque non arctae admodum texturae corporibus dissolvendis, comburendisque satis sit.

PROPOSITIO VIII.

Spatium parabolicum AGCP, curva scilicet parabolica AGC, & coordinatis AP, PC comprehensum circumscripti parallelogrammi APCB duas tertias continet, seu ad illud est, ut 2. ad 3. *Fig. 31.*

Ex vertice A ad extremum usque punctum curvae C recta AC subtendatur, & per quodvis diametri punctum M ordinetur MG subtensae AC occurrens in O, & lateri parallelogrammi BC in Q, & curvae in G; tum excitetur ex G recta DGF axi AP parallela, & eidem subtensae AC occurrens in E. Circa AB veluti axem revolvatur parallelogrammum PB, & triangulum CAB, ita ut fiat a parallelogrammo cylindrus, a triangulo vero conus. His ita constitutis, est PCq ad MGq, vel (*a*) ABq ad ADq, vel [*b*] BCq ad DEq, vel DFq ad DEq, vel tandem [*c*] circulus radii DF in cylindro ad circulum radii DE in cono, ut [*d*] AP ad AM, vel ut DF ad DG. Similiter omnes circuli in cylindro, ad omnes respondentes circulos in cono, erunt ut rectae in parallelogrammo PB ad respondentes rectas in trilineo AGCB. Ergo cylindrus erit ad conum, ut parallelogrammum ad trilineum. Sed (*e*) cylindrus coni triplus est, ergo etiam parallelogrammum PB trilinei AGCB triplum erit; hoc est, erit parallelogrammum ad trilineum ut 3. ad 1. Ergo [per conversionem rationis] erit idem pa-

(a) *Per* 34. *l.* 1.
[b] *Per* 4. & 22. *l.* 6.
[c] *Per* 2. *l.* 12.
[d] *Per* 1. *huj. c.*
[e] *Per* 10. *l.* 12.

parallelogrammum PB ad spatium parabolicum AGCP ut 3. ad 2.

COROLLARIA.

I. SPatium parabolicum AGCP est ad inscriptum triangulum ACP, ut 4. ad 3. Est enim spatium AGCP ad parallelogrammum (*a*) PB, ut 4. ad 6.; parallelogrammum vero PB, ad triangulum APC (*b*) ut 6 ad 3. Ergo ex æquo ordinate spatium parabolicum AGCP ad triangulum ACP, ut 4 ad 3.

[a] *Per hanc pr.*
[b] *Per* 34.*l*.1.

II. Ductis duabus ordinatis PC, MG; erunt spatia parabolica iis terminata AGCP, ANGM, ut earundem ordinatarum cubi. Nam cum ea spatia parabolica (*c*) sint parallelogrammorum PB, MD partes similes, erunt (*d*) inter se ut ipsa parallelogramma. Est autem parallelogrammum PB ad parallelogrammum MD [*e*] in ratione composita ex rationibus simplicibus PC ad MG, & PA ad MA. Sed (*f*) PA ad MA est in ratione duplicata PC ad MG; ergo erit parallelogrammum PB ad parallelogrammum MD in ratione composita ex simplici PC ad MG, & duplicata earundem PC, MG, seu in ratione triplicata PC ad MG, seu tandem ut cubus (*g*) PC ad cubum MG. Ergo in eadem ratione erunt spatia parabolica AGCP, ANGM.

[c] *Per hanc pr.*
[d] *Per* 15.*l*.5.
[e] *Per* 23.*l*.6.
[f] Per *cor*. 1. *p*. 1.*huj*. *c*.
[g] *Per* 33.*l*.11.

PROPOSITIO IX.

Fig.13. *SI circa eandem diametrum AP fuerit parabola ADM, cujus latus rectum AG, & parabola ABE, cujus latus rectum AC, sitque AN media proportionalis inter AG, & AC; erit spatium parabolicum AMP ad spatium parabolicum AEP, ut AG ad AN.*

Est enim [*h*] PMq = rect. PA∗AG, & PEq = rect. PA∗AC; ideoque PMq : PEq :: rect. PA∗AG : rect.

[h] Per 2.*huj*. *c*.

rect. PA*AC :: AG : AC [*a*]. Sed ob continue proportionales AG, AN, AC, est AGq ad ANq, ut [a] *Per*
AG ad AC [*b*]: ergo ex æquali PMq : PEq :: AGq: *1.l.6.*
ANq; & [*c*] PM : PE :: AG : AN. Idipsum cum [b] *Per*
in singulis ad eandem diametrum in utraque cur- *20 l.6.*
va ordinatis locum habeat; erit spatium parabo- [c] *Per*
licum AMP ad spatium parabolicum AEP, ut *22.l.6.*
AG ad AN.

COROLLARIA.

HInc facile ad eandem diametrum parabola describi potest ABE, cujus spatium ABEP sit ad spatium ADMP alterius datæ parabolæ ADM parametro AG descriptæ in data ratione, puta ipsius AG ad AN. Inveniatur enim tertia proportionalis AC post AG & AN, eaque ut parametro describatur parabola ABE; hæc erit quæsita.

PROPOSITIO X.

SI parabola AGC circa axem AP revolvatur, *Fig.31.*
solidum inde genitum, seu conois parabolica erit cylindri, qui ex rotatione circumscripti parallelogrammi PB gignitur, pars dimidia.

Est quippe circulus radii MQ in cylindro ad circulum radii MG in conoide, ut MQq vel PCq
ad MGq, seu [*d*] ut PA ad MA, seu [*e*) ut
PC vel MQ in parallelogrammo PB ad MO in [d] *Per*
triangulo PAC. Et ita porro quivis circulus in *1.huj.*
cylindro ad respondentem circulum in conoide, [e] *Per*
ut recta in parallelogrammo PB ad respondentem *4.l.6.*
aliam in triangulo PAC. Ergo erit cylindrus conoidis duplus, ut parallelogrammum PB trianguli APC duplum est.

CA-

CAPUT III.

Præcipuæ Hyperbolæ Proprietates recensentur.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 7. IN *hyperbola GNM erunt ordinatarum GK, EP quadrata, ut rectangula QKN, QPN, quæ nempe diametri partibus inter easdem ordinatas, & utrumque verticem N, Q continentur.*

Ex puncto P ubi ordinata EP diametro sectionis occurrit, recta RPV ducatur basis diametro BD parallela; eritque planum per RV, EI transiens [*a*] plano basis parallelum, & proinde [*b*] erit etiam circulus, cujus diameter RV, chorda EI bifariam secta in P & [*c*] perpendiculariter; eritque [*d*] EPq = rect.RPV, quemadmodum [*e*] GKq = rect.DKB. Est itaque GKq: EPq::rect.DKB: rect.RPV. Sed rect.DKB ad rect. RPV est in ratione composita [*f*] ex rationibus DK ad RP, & KB ad PV; seu [*g*] ex rationibus KN ad PN, & KQ ad PQ, seu tandem ut rect. QKN ad rect. QPN, cum hæc postrema ratio ex iisdem rationibus [*h*] KN ad PN, & KQ ad PQ componatur. Ergo GKq : EPq :: rect. QKN : rect. QPN. Quod erat demonstrandum.

[a] *Per* 15.*l*.11. [b] *Per schol*.2. *def*.2. [c] *Per* 4.*l*.3.*vel* 10.*l*.11. [d] *Per cor*.1.*pr*. 17.*l*.6. [e] *Per idem cor*. [f] Per 23.*l*.6. [g] *Per* 4.*l*.6. [h] *Per* 23.*l*.6.

COROLLARIA.

I. IDipsum locum habet in hyperbola opposita RQX; quadrata scil. ejus ordinatarum RO, ep sunt ut rectangula NOQ, NpQ. Quin quadrata ordinatarum in duabus oppositis sectionibus GNM, RQX invicem collata eandem rectangulorum rationem sequuntur, quæ nempe diametri partibus inter ipsas ordinatas, & utrumque verticem Q, N positis continentur: hoc est, GKq: ROq::

ROQ:: rect. QKN : rect. NOQ. Demonstratio fere eadem est ac quæ propositionis.

II. Si fiat ut rect. QKN ad quad. GK, ita latus transversum QN ad aliam rectam S; erit quodcunque aliud simile rectangulum QPN ad quadratum respondentis ordinatæ EP, ut idem transversum latus ad eandem rectam S. Similiter in opposita sectione erit rectangulum NOQ ad respondentis ordinatæ OR quadratum, ut idem transversum QN ad eandem rectam S. Dicetur autem deinceps hæc recta S utriusque sectionis *parameter* seu *latus rectum*. Hyperbola dicetur *æquilatera* si latus transversum lateri recto fuerit æquale, & ordinatarum GK, EP quadrata respondentibus rectangulis QKN, QPN fuerint quoque æqualia; si secus hyperbola dicetur *scalena*.

PROPOSITIO II.

SI ex vertice N hyperbolæ VNM perpendiculariter ad latus transversum QN excitetur NA æqualis parametro ejusdem sectionis, atque ex Q per A recta ducatur QA in infinitum versus A producta, cui ex P & K ductæ ipsi NA parallelæ PB, KC, occurrant in B & C: dico quadratum ordinatæ KM æquari rectangulo ex NK in KC, & quadratum ordinatæ PI rectangulo ex NP in PB; & sic deinceps. Fig. 32.

Rect. QKN : KMq :: QN : NA [*a*] :: QK : KC [*b*] seu [assumpta KN pro communi altitudine] :: rect. QKN : rect. NK×KC [*c*]. Est itaque rect. QKN ad KMq, ut idem rect. QKN ad rect. NK×KC: quare cum hujus rationis antecedentia sint æqualia, erunt quoque & consequentia æqualia, nempe KMq & rect. NK×KC. Eodem modo demonstratur PIq rectangulo NP×PB æquari. Patet ergo propositum.

[a] *Per cor.* 2. *pr.*
[b] *Per* 4. *l.* 6.
[c] *Per* 1. *l.* 6.

COROLLARIA.

I. QUadratum cujusque ordinatæ VK vel KM æquatur rectangulo ex latere recto NA in abscissam NK, hoc est rectangulo KA, una cum alio rectangulo HG ex eadem abscissa NK vel AH in HC quartam proportionalem ad QN latus transversum, NA latus rectum, & NK vel AH abscissam. Est enim idem quadratum VK æquale rectangulo KG, seu duobus simul KA, HG: prius ex abscissa NK in latus rectum NA fit; alterum vero ex eadem abscissa AH in HC, seu [ob similitudinem triangulorum QNA, AHC] ex abscissa AH in quartam proportionalem post QN, NA, AH.

II. Rectangula KG, PD, quæ quadratis ordinatarum VK, EP æquantur, lateri recto NA sunt applicata, exceduntque rectangula KA, PA ex respondentibus abscissis in parametrum, rectangulis HG, FD, quæ [a] similia sunt rectangulo NL, quod sub transverso QN & recto latere NA, continetur. Et hinc innotescit cur hyperbolæ nomen huic curvæ concessum sit, quod vid. quadrata ordinatim applicatarum excedant rectangula ex respondentibus abscissis in parametrum: unde hyperbola, quasi *excedens* dicta est.

[a] *Per* 24. *l.* 6.

III. Si ex vertice N ad punctum C recta NC ducatur, erit quadratum VK duplum trianguli KNC. Similiter ducta NB, erit quadratum EP trianguli NPB duplum; eorundem enim triangulorum dupla sunt rectangula KG, PD, quæ iisdem quadratis ordinatarum VK, EP æquantur.

SCHOLIUM.

Fig. 34. DAtis hyperbolæ latere transverso & recto facile in plano ea transferri poterit, infinita illius puncta inveniendo. Sit enim latus transver-

ſum QN indefinite verſus N productum; latus rectum AN, quod ex N perpendiculariter lateri transverſo NQ jaceat. Per terminos Q & A transverſi & recti lateris recta QA ducatur, indefinite verſus A producta: tum ex punctis in AF ad libitum aſſumtis, puta D, F, ducantur DM, FL ipſi AN parallelæ diametro NG occurrentes in B & C. Ex BM abſcindatur BC æqualis BN, & ex GL abſcindatur GH ipſi GN æqualis. Super DC, & FH ſemicirculi deſcribantur DKC, FIH diametro GQ occurrentes in K & I. Abſcindatur tandem ex BM pars BE æqualis BK, & ex GL abſcindatur GL ipſi GI æqualis. Dico puncta E & L eſſe in hyperbola, cujus latus transverſum QN & rectum NA. Eſt enim [a] BKq, vel BEq = rect. DBC, vel (ob BN, BC æquales) = rect. DB, BN. Sed eſt etiam quadratum ordinatæ ex puncto B ad hyperbolam latere transverſo QN, & recto AN deſcriptam æquale per hanc propoſitionem eidem rectangulo DB, BN. Ergo patet rectam BE eſſe ejus ordinatæ longitudinem, & punctum E eſſe in hyperbola. Similiter demonſtratur punctum L, & alia quotcunque ſimiliter determinata ad hyperbolam pertinere.

[a] *Per cor. 1. pr. 17. l. 6.*

Fig. 35.

Sed en aliam non inelegantem hyperbolæ deſcriptionem ab ipſa quoque parametri proprietate dependentem, quæ facili quodam regularum motu abſolvitur. Sit recta QN deſcribendæ hyperbolæ latus transverſum, NA vero eidem QN occurrens in N cum ejuſdem parametrum, tum ordinatarum poſitionem ad diametrum QNK exhibeat. Per terminum parametri A recta AH ducatur ipſi QN parallela; tum circa terminos lateris transverſi Q & N duæ regulæ QZ, NX revolvi intelligantur, hac lege, ut quæ per eas abſcinduntur NL, AV ex ipſis NA, AH productis, ſint perpetuo æquales. Dico curvam perpetuis ejuſmodi regularum QZ, NX interſectionibus M deſcriptam eſſe hyperbolam quæſitam. Ducta enim

ex M ordinata MK, est hujus quadratum ad rectangulum QKN (*a*) in ratione composita ex KM ad KN, & ex eadem KM ad KQ. Est autem [ob similitudinem triangulorum KNM, NVA), KM ad KN, ut NA ad AV, seu NL [cum ex hypoth. NL, AV sint æquales]; tum [ob similitudinem triangulorum QKM, QNL] est KM ad KQ, ut NL ad NQ. Igitur erit quadratum KM ad rectangulum QKN in ratione composita ex NA ad NL, & ex NL ad NQ, hoc est, ut NA ad NQ. Sed quadratum ordinatæ ex puncto M ad hyperbolam latere transverso NQ & recto NA descriptam est ad idem rectangulum QKN [*b*], ut latus rectum NA ad latus transversum NQ: ergo patet ejus ordinatæ longitudinem esse KM, & punctum M ad hyperbolam pertinere.

[a] *Per* 23.*l*.6.

[a] *Per cor.*2.*p.* 1.*huj.c.*

Sed quo ejusmodi regularum motus melius intelligatur observandum est, quod cum regula NX circulari motu fertur ex NA versus NK, oporteat QZ circulariter moveri ex QK versus QT ipsi NA parallelam; ita enim crescentibus AV, augentur etiam NL. Evadit vero AV infinita, cum tandem NX ad NK pervenit, eidemque congruit; tuncque etiam NL infinita evadat necesse est, congruente scilicet QZ cum ipsa QT. Quod si NX circulariter moveatur ex NK versus NA; tum QZ necesse est moveri ex QT versus QK; ita enim decrescentibus AV, minuuntur etiam NL; atque evanescente tandem AV ob congruentiam regulæ NX cum NA, evanescet etiam NL decidente QZ in ipsam QK.

PROPOSITIO III.

Fig. 33. *Isdem positis quæ in propositione præced. si latus transversum QN, & latus rectum NA bifariam secentur in C & E, ducaturque per ea sectionum puncta recta CED, cui occurrat in D ordinata KG producta; erit quadratum ejusdem ordi-*

dinata KG duplum quadrilateri ENKD; & similiter cujusvis alterius ordinatæ LP quadratum duplum erit quadrilateri TLNE sibi respondentis.

Nam cùm sit [*a*] NC : CQ :: NE : EA, erit [*b*] CE ipsi AQ parallela; quare cum in triangulo RNQ sit CF ipsi QR parallela, erit [*c*] QC : CN :: RF : FN; & propterea RF æqualis FN. Sunt autem duo triangula EFN, RFD similia; ergo ob æqualitatem rectarum RF, FN, æqualia & ipsa erunt. Si igitur utrisque addatur commune quadrilineum DFNK, fiet triangulum RNK quadrilineo DENK æquale. Sed quadratum KG duplum est trianguli RNK [*d*]; ergo & quadrilinei DENK duplum quoque erit. Similiter demonstratur cujusvis alterius ordinatæ quadratum, veluti LP, respondentis quadrilinei, puta TENL duplum esse.

[a] *Per constr.*
[b] *Per 2.l.6.*
[c] *Per eandem.*
[d] *Per cor.3. præc.*

Punctum C quod latus transversum bifariam dividit, oppositarum sectionum *centrum* appellatur. Recta QA transversi & recti lateris terminos Q & A jungens *Directrix*; & CE per bisectionum puncta C & E transiens *Subdirectrix* poterit appellari.

PROPOSITIO IV.

Datæ hyperbolæ ad datum in ejus perimetro punctum tangentem ducere.

Si datum punctum sit in sectionis vertice A, satis est ex eodem ordinatis HE, PM parallelam ducere; ea enim erit quæsita tangens. Quia si alibi præter quam in vertice ea occurret hyperbolæ, ex una tantum diametri parte chordam efficeret, uti in parabola observatum est; proindeque diameter non bifariam secaret omnes parallelas ordinatis intra sectionem positas, contra id quod superius demonstratum est in sch. def.3. *Fig. 36.*

Sit modo datum punctum extra sectionis verticem, puta in M. Rectæ AQ, AN ad rectos an-

gulos sibi occurrentes in A, latus transversum, & latus rectum datæ hyperbolæ exhibeant; sitque CRG per bisectionum puncta C & R transiens subdirectrix. Ex M ad axem AP ordinetur MP, quæ producatur usque ad subdirectricem in G; tum fiat ut GP ad PM, ita PM ad tertiam proportionalem, quæ transferatur in axe ex P in T. Ex T ad M ducatur recta TM: dico hanc esse quæsitam tangentem.

Sumatur in recta TM ubilibet punctum D, ex quo ducta ordinatis parallela DF, subdirectrici occurrat in F; agaturque GT. Cum itaque tres GP, PM, PT sint [a] continue proportionales, erit [b] extremarum GP, PT rectangulum æquale quadrato mediæ PM; eritque [c] idem quadratum PM duplum trianguli GPT. Sed [d] est idem quadratum PM duplum quadrilinei GPAR; ergo idem quadrilineum GPAR, & triangulum GPT erunt æqualia. Et hinc patet triangulum LTH majus esse quadrilineo FHAR; cum prius deficiat ab uno æqualium, nempe a triangulo GTP quadrilineo GPHL, quæ minor quantitas est quadrilineo GPHF, quo quadrilineum FHAR deficit ab altero æqualium, nempe a quadrilineo GPAR. Præterea est triang. PTM : triang. HTD:: triang. GTP : triang. LHT; cum tam prior, quam secunda triangulorum ratio eadem sit (e) ac duplicata laterum PT, HT: proindeque cum [f] sit PMq : HDq :: triang. PTM : HTD; erit etiam PMq. : HDq. :: triang. GPT. triang. LHT. Ergo cum quadratum PM duplum sit trianguli GPT, erit adhuc quadratum HD duplum trianguli LTH. Est vero quadratum ordinatæ HE duplum quadrilinei FHAR (g). Ergo cum triangulum LHT majus sit quadrilineo FHAR, erit etiam quadratum HD majus quadrato HE, & recta HD major recta HE. Similiter si punctum d sumatur in tangente infra M, demonstrabitur hd major he. Sed puncta E, e sunt in sectione; ergo puncta

[a] *Per constr.*
[b] *Per* 17. *l.* 6.
[c] *Per* 34. *l.* 1.
[d] *Per prac.*
[e] *Per* 19. *l.* 6.
[f] *Per* 19. & 20. *l.* 6.
[g] *Per prac.*

D,

D, d, & quæcunque alia præter M erunt extra sectionem. Igitur MT erit tangens ad datum punctum M.

COROLLARIA.

I. SI in axe ex P sumatur PV æqualis PG, jungaturque VM, erit hæc tangenti MT normalis. Est enim PM media proportionalis inter PV, PT; proindeque angulus TMV, uti ex 8. l. 6. facile colligitur, rectus erit. Igitur excitabitur ad punctum M tangens, si ducta subdirectrice GC, quæ ipsam GP abscindit, eidem PG æqualis ponatur PV, jungaturque VM, & huic tandem ex M perpendicularis ducatur MT; hæc erit tangens.

II. Ducta directrice QNO, cui occurrat in O
ordinata MP, erit etiam PMq (*a*) = rect. OPA; (a) *Per*
ergo rect. OPA = rect. GPT; ideoque (*b*) erit PG: 2. *huj. e.*
PO :: PA : PT. Igitur tangens ad datum punctum (b) *Per*
M etiam determinabitur, si fiat ut PG ad PO 10. *l.* 6.
ita PA ad PT; ex T enim ad M juncta recta TM erit tangens.

III. Cum sit PG : PO :: PA : PT, erit invertendo PO : PG :: PT : PA, & dividendo ac invertendo erit PG : GO (seu dimidium lateris recti) :: PA : AT. Hinc etiam alia eruitur tangentis ducendæ methodus. Præterea cum sit OG =
NR = RA, erit PG : RA :: PA : AT; sed (*c*) (c) *Per*
PG : RA :: PC : CA; ergo etiam [*d*] erit PC : 4. *l.* 6.
CA :: PA : AT. Et alternando PC : PA :: CA : (d) *Per*
AT; & convertendo PC : CA :: CA : CT. Igi- 11. *l.* 5.
tur erit quadratum CA, seu dimidii lateris transversi, æquale rectangulo PC.CT; quod elegantem etiam exhibet inveniendæ tangentis methodum.

IV. Præterea æqualibus CAq, & rect. PCT, si utrumque auferatur a communi quadrato CP, reliqua erunt quoque æqualia, nempe rectangu-

 lum

lum QPA, & rectangulum CPT.

V. Cum sit ut ante PO : PG :: PT : PA, erit convertendo PO : OG (= RA) :: PT : TA. Sed ratio PO ad RA componitur ex duabus rationibus OP ad NA, & NA ad AR; quarum prior eadem est ac ratio PQ ad QA (a), altera est dupla: ergo etiam ratio PT ad TA componetur ex iisdem rationibus PQ ad QA & ratione dupla.

(a) *Per* 4.*l*.6.

VI. Ducta vero tangente verticali AX est PT : TA :: PM : AX [b]; ergo hæc quoque ratio PM ad AX componetur ex duabus PQ ad QA, seu [ducta QM] PM ad AZ [c], ac ratione dupla. Sed eadem ratio PM ad AX componitur ex duabus PM ad AZ, & AZ ad AX; ergo necesse est rationem AZ ad AX duplam esse, rectamque AZ in X bisecari. Quod aliam quoque exhibet ducendæ tangentis methodum.

(b) *Per* 4.*l*.6.
(c) *Per eandem.*

VII. Ducta ex Q ordinatis parallela QB, cui occurrat in B tangens MT; erit ob similitudinem triangulorum BTQ, ATX, QT : TA :: QB : AX, vel :: QB : XZ [d] vel :: QM : MZ [e], vel :: QP : PA [f]. Igitur QT : TA :: QP : PA. Sed QP major semper est PA; ergo etiam QT major semper erit ipsa TA; ideoque punctum T semper erit infra centrum C.

(d) *Per cor. præc.*
(e) *Per* 4 *l*.6.
(f) *Per* 2.*l*.6.

VIII. Per punctum M & verticem A ducatur recta MA ipsi QB occurrens in K; erit KQ bifariam secta in B per tangentem MTB. Est enim [g] KB : BQ :: AX : XZ. Igitur æqualibus AX, XZ, æquales erunt KB, BQ.

(g) *Per cor*. 2. *p*. 4.*l*.6.

IX. Hinc rectangulum ex BQ in AX, seu ex dimidiis tangentibus verticalibus KQ, AZ erit æquale quadranti rectanguli ex transverso latere in rectum, seu rect. QA*AN. Cum enim sit [h] PM q æquale rectangulo ex AP in PO, erit OP : PM :: PM : PA. Est autem [i] OP : PM :: NA : AZ :: & PM : PA :: KQ : QA. Ergo ex æquali erit NA : AZ :: KQ : QA, & [k] rect. NA*QA = rect.

[h] *Per* 2.*hujus*.
(i) *Per* 4.*l* 6.
(k) *Per* 16.*l*.6.

rect. AZ*QK. Sed ob AX, BQ dimidias partes ipsarum AZ, QK, est rectangulum BQ*AX quarta pars rectang. QK*AZ; ergo idem rect. BQ*AX quadranti ipsius QA*AN æquale erit.

SCHOLIUM.

Angulus contactus hyperbolicus CAQ nulla recta linea secari potest; est enim æqualis angulo contactus circularis, qui nempe fit a tangente AC & circulo AKG diametrum AG habente æqualem parametro AC hyperbolæ AFQ. Sit enim ejusdem hyperbolæ latus transversum BA, cui in directum jaceat AE abscissa infinite exigua, eidemque respondeat ordinata EF. Ob hyperbolam AFQ est rect BEA : EFq :: BA : AC, seu [ob AC = AG] :: BA : AG, seu etiam :: BE : EG [cum enim sit AE infinite parva, sive addatur ad BA, sive auferatur ab AG, easdem lineas nec auget, nec minuit]. Est autem BE : EG :: rect. BEA : rect. GEA [a]; igitur erit etiam rect. BEA : EFq, :: rect. BEA : rect. AEG; & hinc rect. AEG = EFq. Recta igitur EF cum circuli tum hyperbolæ communis est ordinata ex puncto E; proindeque punctum F utrique curvæ commune. Similiter omnes ordinatæ usque ad verticem A, utrique curvæ communes erunt; ac per consequens arcus AF communis; & idem in utraque curva angulus contactus CAF. *Fig. 20.*

(a) *Prop. 1. l. 6.*

PROPOSITIO V.

In hyperbola AM quævis recta MC per centrum C ducta, si ulterius producatur, oppositæ sectioni QN occurret in N, eademque bifariam in centro C secabitur. Tum quæ ex ejus terminis M, N ducuntur ad diametrum usque tangentes, parallelæ sunt, & æquales. *Fig. 37.*

Prima pars. Ordinetur ex M ad diametrum

PROPOSITIO VI.

Fig. 37. IN *sectionibus oppositis quadrata ordinatarum ME, IR ad diametrum conjugatam BD sunt ut summa quadratorum BC, CE, ad summam quadratorum ejusdem BC & CR.*

Est enim in hyperbola AM rect. QPA : PMq :: [a] QA : AV, seu [ob QA, BD, AV continue proportionales] :: QAq : BDq :: CAq : CBq. Ergo [b] summa antecedentium, scilicet rectanguli QPA & quadrati CA, seu [c] quadratum CP, vel EM, erit ad summam consequentium; scil. quadrati PM, seu EC, & quadrati BC, ut unum antecedens CAq ad suum consequens CBq. Cumque similiter demonstretur esse RIq : CRq + CBq :: CAq : CBq; consequens est ut sit [d] EMq : CEq + CBq :: RIq : CRq + CBq; & permutando EMq : RIq :: CBq + CEq : CBq + CRq.

(a) *Per cor. 2. p. 1. hujus.*
[b] *Per* 12. *l.* 5.
[c] *Per* 6. *l.* 2.
[d] Per 11. *l.* 5.

COROLLARIA.

I. CUm sit [e] ∺ BD, AQ, BL, erit BDq ad AQq, vel etiam BCq ad CAq; ut diameter conjugata BD ad suum parametrum BL; & proinde invertendo erit etiam CAq : CBq :: BL : BD. Erit itaque EMq : CBq + CEq :: BL : BD, & IRq : CBq + CRq :: BL : BD.

II. Descriptis hyperbolis conjugatis BX, DZ, erit KRq ad rect. DRB, ut BL ad BD, seu [f] ut IRq ad CBq. + CRq; & alternando IRq ad KRq. ut CBq. + CRq. ad rect. DRB; & dividendo IRq. — KRq, seu [g] rectang. IKO ad KRq, CBq + CRq. — rectang. DRB, seu [h] CBq + CBq, seu 2CBq ad DRB; & iterum alternando rect. IKO ad 2CBq, ut KRq ad rect. DRB, sive ut BL ad BD, sive ut ACq ad CBq, vel etiam ut 2ACq ad 2CBq. Erit itaque rect. IKO. ad 2CBq, ut 2ACq ad 2CBq. Æqualibus ita-

[e] *Per cor.* 3. *praec.*
[f] Per *ant. cor.*
[g] *Per* 6. *l.* 2.
[h] *Per eand.*

itaque hujus rationis consequentibus, æqualia etiam erunt antecedentia, nempe rectangulum IKO, & duplum quadrati AC. Patet itaque illud rectangulum IKO, ubicumque fuerit ordinata IR, ejusdem & constantis ubique esse magnitudinis.

III. Si ordinata IO accedere supponatur ad verticem B, parallela semper ad AQ manens, patet cum ad ipsum verticem B tandem pervenerit, confundi cum tangente verticali BY, fierique rectangulum IKO idem ac quadratum BY; proindeque erit idem quadratum BY æquale duplo quadrati CA. Quod etiam ex ipsa propositionis demonstratione liquet.

LEMMA AD PROP. VII.

SI in hyperbola AM contingens recta MT cum diametro conveniat in T, & a contactu M ad eandem diametrum sit ordinata MP, cui per sectionis verticem A sit parallela AD, quæ cum linea MC ex contactu M ad centrum C ducta conveniat in D: tum sumto in sectione aliquo puncto F ab eo ducantur duæ rectæ FH, FV; prior quidem curvam secans in K tangenti MT sit parallela; altera vero ordinatæ PM sit quoque parallela; atque eidem MP parallela sit ex K recta KI cum ipsa MC conveniens in R: Dico 1. triang. MTP æquari quadrilineo MDAP; 2. triangulum quoque FHV quadrilineo BDAV, & triangulum KHI quadrilineo RDAI æquari. Fig. 38.

Cum enim duo triangula MCP, DCA sint similia, erunt [a] in ratione duplicata laterum CP, CA; ideoque ob CP, CA, CT continue proportionales [b] erit triangulum MCP ad triangulum DCA, ut PC ad CT, seu [c] ut triangulum idem MCP ad CMT. Ergo [d] duo triangula DCA, CMT erunt æqualia. Si igitur hæc auferantur ab eodem triangulo MCP, quæ remanent, nem-

[a] *Per* 19.*l*.6.
[b] *Per* *co*.3.*p*.4.
[c] *Per* 1.*l*.6.
[d] *Per* 9.*l*.5.

nempe quadrilineum MDAP, & triangulum MTP æqualia erunt. Quod erat primum.

[a] *Per 1. hujus.*
[b] *Per 6. l. 2.*

Est præterea (*a*) FVq ad MPq, ut rect. QVA ad rect. QPA, seu ut differentia [*b*] VCq a CAq ad differentiam CPq ab eodem CAq. Sed ob similitudinem triangulorum BCV, MCP, DCA sunt quadrata CV, CP, CA ut eadem triangula BCV, MCP, DCA. Ergo erit etiam differentia VCq a CAq ad differentiam CPq ab eodem CAq, ut differentia trianguli BCV a triangulo DCA, seu quadrilineum BDAV, ad differentiam trianguli MCP ab eodem triangulo DCA, seu ad quadrilineum MDAP. Igitur erit FVq ad MPq, ut quadrilineum BDAV ad quadr. MDAP. Sed ob similitudinem triangulorum FHV, MTP, sunt hæc eadem triangula ut FVq, MPq: ergo erit quoque triangulum FHV ad triang. MTP, ut quadr. BDAV ad quadr. MDAP. Sed per primam partem sunt consequentia æqualia, scilicet triangulum MTP & quadrilin. MDAP; ergo & æqualia quoque erunt antecedentia, triangulum scilicet FHV, & quadrilineum BDAV. Eodem modo demonstratur triangulum KHI quadrilineo RDAI æquari. Eademque est demonstratio si punctum F ad alteram sectionis partem sumatur.

COROLLARIA.

Cum sit triangulum KHI quadrilineo RDAI æquale, si utrumque auferatur ab eodem triangulo RCI, reliqua erunt æqualia, scilicet quadrilineum RCHK, & triangulum DCA. Sed triangulo DCA æquatur triangulum CMT; ergo idem triangulum CMT, & quadrilineum RCHK erunt æqualia.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Si hyperbolam AE tangens recta MT cum diametro concurrat in T, & per contactum M, & centrum C ducatur recta MCS usque ad oppositam sectionem, hæc bifariam secabit quæ tangenti MT ducuntur intra curvam parallelæ, veluti FK, EA. Eruntque ordinatarum ZA, LK quadrata, ut rectangula SZM, SLM, quæ vid. ejusdem diametri partibus inter ipsas applicatas, & utrumque ejus terminum S, M continentur. Fig. 38.

I. Pars. Cum enim per lemma sit triangulum FHV æquale quadrilineo BDAV, & triangulum KHI æquale quadrilineo DRIA, his ab illis ablatis erit triangulum FHV, demto triangulo KHI, seu quadrilineum FKIV æquale quadrilineo BDAV, demto quadrilineo RDIA, seu æquale quadrilineo BRIV. Ergo si ab his æqualibus quadrilineis FKIV, & BRIV auferatur commune trapezium BLKIV, reliqua triangula FLB, RLK erunt æqualia. Sed sunt hæc eadem triangula similia; ergo æqualia erunt quoque quadrata FL, LK, & æquales etiam rectæ ipsæ FL, LK. Et eodem modo demonstratur rectam EA bifariam quoque dividi in Z. Quod erat primum.

Pars II. Ex demonstratis in lemmate triangulum CDA æquale est triang. CMT, si ea ergo auferantur ab eodem triangulo ZCA, residua erunt æqualia, triangulum sc. DZA, & quadril. MTAZ. Similiter cum quadrilineum CRKH, & triangulum CMT sint æqualia, si ab eodem triangulo CLH auferantur, reliqua erunt quoque æqualia; triangulum sc. RLK, & quadrilineum MLHT. Erit itaque triangulum DZA ad triangulum RLK, ut quadrilin. MZAT ad quadril. MLHT, seu ut differentia trianguli ZCA a triangulo MCT ad differentiam trianguli LCH ab eodem triangulo MCT, hoc est (ob similitudi-

nem

nem triangulorum ZCA , LCH , MCT ,) ut differentia quadrati ZC a quadrato MC ad differentiam quadrati LC ab eodem quadrato MC; hoc est [*a*] ut rect. SZM ad rect. SLM. Sed triangula DZA, RLK sunt similia, & propterea inter se ut quadrata rectarum ZA, LK. Erit igitur AZq : LKq :: rect. SZM : rect. SLM. Quod erat demonstrandum.

[a] *Per* 6.*l*.2.

COROLLARIA.

I. **E**Rit itaque MS altera diameter bifariam secans quæ ipsi appliacantur, quemadmodum diameter principalis QA bifariam suas ordinatas secat; eademque est coordinatarum relatio relate ad hanc diametrum, ac quæ ad coordinatas diametri principalis QA pertinet. Quod si eadem MS intra oppositam hyperbolam producatur, ibi etiam ordinatas quæ ducuntur intra sectionem tangenti ex S parallelas bisecabit; eruntque earum applicatarum quadrata, ut rectangula inter easdem ordinatas, & utrumque diametri terminum contenta. Dicetur propterea recta SM, & quævis alia per centrum C transiens *Diameter secundaria*.

II. Cum eadem sit relatio coordinatarum ad secundariam diametrum, & ad principalem, quæcunque respectu diametri principalis superius sunt demonstrata, cuique secundariæ diametro facile potuerunt applicari. Sic e. g. quemadmodum tangens MT occurrens diametro principali QA ita eam dividit, ut sint CP, CA, CT continue proportionales, & CQq, vel CAq sit æquale rectangulo PCT: ita quoque tangens AD diametro MS occurrens in D, ita eam dividet, ut CZ, CM, CD sint continue proportionales, sitque rectang. ZCD æquale quadrato CM. Et quemadmodum ducta ex termino diametri principalis Q ad punctum M recta QK, quæ inde intercipitur tangens

*Fig.*36.

ver-

verticalis AZ bifariam in X secatur; ita quoque *Fig.* 38.
juncta AS, intercepta tangentis pars MX bifariam a tangente AD dividetur in O.

III. Eodemque modo invenietur parameter ad hanc secundariam diametrum, quo ad principalem inventa est, determinando sc. tertiam proportionalem post rectangulum SZM, ZAq, & diametrum ipsam MS. Inventa vero parametro determinabitur ad hanc secundariam diametrum sua conjugata, inveniendo mediam proportionalem inter ipsam secundariam diametrum, & suam parametrum: eaque ex centro C collocabitur ordinatis EA, FK parallela, & in eodem centro C bisecta.

S C H O L I U M.

Ex hactenus exposita diametrorum doctrina hæc ulterius pro provectioribus tironibus consequuntur.

I. Ducta ex puncto Z ordinatis ad principalem *Fig.* 38.
diametrum MP, EN parallela ZG, similia erunt triangula EAN, ZAG: unde quemadmodum EA dupla est ipsius AZ, ita etiam EN erit dupla ZG, & AN dupla ipsius AG. Sed est etiam AQ dupla ipsius AC; ergo erit tota QN totius CG dupla; & rectang. ex QN in NA quadruplum erit rectanguli CGA; uti quadratum EN quadruplum est quadrati ZG. Erit igitur ZGq ad ENq, ut rect. CGA ad rect. QNA. Est præterea ENq (*a*) ad MPq, ut rect. QNA ad rect. QPA: igitur ex æquo ordinate erit ZGq ad MPq, vel (ob similitudinem triangulorum ZCG, MCP) CGq ad CPq, ut rect. CGA ad rect. QPA. Et alternando erit CGq ad rect. CGA, ut CPq ad rectang. QPA; & convertendo erit CGq ad rectang. GCA (*b*), ut CPq ad CAq (*c*); & iterum alternando CGq ad CPq, ut rectang. GCA ad CAq, seu ut GC ad CA (*d*). Igitur cum sit GCq ad CPq (*e*) in

(a) *Per* 3. *hujus.*

(b) *Per* 2. *l.* 2.

(c) *Per* 6. *l.* 2.

(d) *Per* 1. *l.* 6.

(e) *Per* 20. *l.* 6.

in ratione duplicata CG ad CP, erit hæc duplicata ratio eadem ac CG ad CA; ac proinde CG, CP, CA continue proportionales erunt, & rect. GCA æquale quad. CP.

II. Ob similitudinem triangulorum ZCG, MCP est ZC ad MC, ut GC ad PC, seu ut PC ad AC. Cum itaque duo triangula ZCA, MCP circa communem angulum ZCA reciproce proportionalia habeant latera, erunt inter se (*a*) æqualia.

(a) *Per* 15. *l.6.*

III. Cum sit ZC ad CM ut PC ad AC, erit etiam convertendo ZC ad ZM, ut PC ad PA; & dividendo CM ad MZ ut CA ad AP; & duplicatis antecedentibus erit SM ad MZ ut QA ad AP; & SM ad SZ, ut QA ad QP. Erit itaque QAq ad rectang. QPA, ut MSq ad rect. SZM: nam prior ratio ex duabus QA ad QP, & QA ad AP componitur, posterior ratio ex duabus SM ad SZ; & SM ad MZ, quæ prioribus sunt æquales. Præterea (*b*) rect. QPA est ad quadr. PM, ut latus transversum QA ad suam parametrum; seu (ducta diametro conjugata qa) ut quadratum QA ad qa quadratum. Itaque alternando erit QAq ad rect. QPA, ut quadratum qa ad MP quadratum. Similiter demonstratur SMq ad rect. SZM, ut quadratum suæ diametri conjugatæ SM ad ZAq. Cum itaque sit QAq ad rect. QPA ut SMq ad rect. SZM; erit etiam ex æquali qa quadratum ad MPq, ut ms quadratum ad ZAq: adeoque conjugatæ ipsæ qa, ms, vel earum dimidiæ qc mc erunt in ratione ordinatarum MP, AZ.

(b) *Per* 1. *hujus.*

IV. Illud tandem ex dictis consequitur, descriptis hyperbolis conjugatis BM, DS, diametros conjugatas habentibus QA, BD, ut in cor. 3. prop. 5., reperiri in earum perimetro vertices omnium diametrorum conjugatarum. Ita si MS sit diameter secundaria oppositarum sectionum QS, AM, & ms sit eidem conjugata, seu media sit proportionalis inter eandem SM, & ejus parametrum, sitque ex centro C parallela tangenti MT,

Fig. 39.

vel

vel eis quæ ad diametrum MS applicantur uti AI, sitque in eodem centro C bisecta: dico ejusdem terminos m, s in conjugatis hyperbolis Bm, Ds reperiri.

Eo sane res redit ut ex puncto s ducta ad diametrum BD ordinata sE, demonstretur ejus quadratum esse ad rectangulum BED, ut latus rectum hyperbolarum conjugatarum Ds, Bm ad eorundem latus transversum BD, vel ut quadratum AQ ad quadratum BD; ita enim punctum s pertinere patebit ad hyperbolam Ds. Id vero ita demonstratur.

Ex vertice A hyperbolæ AM ducatur tangens AH secundariæ diametro CM occurrens in H; tum ex puncto s uno terminorum conjugatæ ms ducatur sG ipsi CM parallela occurrens BD in G. Cum itaque AI, Cs sint parallelæ, erit angulus AIC æqualis suo alterno ICs, seu angulo CsG (ob Gs, CM parallelas). Est item ob AH parallelam BD, angulus AHI æqualis angulo BCH, seu CGs ob CM Gs etiam parallelas. Erunt igitur duo triangula AHI, CGs similia; & propterea CG ad Cs, ut AH ad AI. Jam vero est CG ad CD in ratione composita ex CG ad Cs, & Cs ad CD, seu in ratione composita ex AH, AI, & ex AI ad PM, seu in ratione simplici AH ad PM, vel CA ad CP, vel CM ad CI, vel tandem MT ad IA. Est præterea MT ad AI in ratione composita ex MT ad MP, & MP ad AI, seu (ob similitudinem triangulorum TPM, CSE) in ratione composita ex Cs ad CE, & CD ad Cs, seu in ratione simplici CD ad CE (est enim hæc composita ratio eadem ac quæ exprimitur per $\frac{Cs\times CD}{CE\times Cs} = \frac{CD}{CE}$). Igitur ex æquali erit CG ad CD ut CD ad CE; & CDq æquale erit rect. GCE. Si ergo tam quadr. CD, quam rect. GCE auferantur a communi quadrato CE, reliqua erunt

(a) *Per* æqualia, rectangulum sc. BED (*a*) & rectangulum
6. l. 2. CEG. (*b*)
(b) *Per* Jam vero cum TM sit tangens ex puncto M,
2. l. 2. erit etiam rect. QPA æquale rect. TPC (*c*): qua-
(c) *Per* re erit rectang. CPT ad quadratum PM, ut re-
cor. 4. pr. ctang. QPA ad idem quadratum PM, seu ut qua-
4. hujus. dratum AQ ad quadratum BD. Est præterea rectangulum CPT ad quadratum PM in ratione composita ex TP ad PM, & CP ad PM, seu in ratione composita (ob similitudinem triangulorum TPM, CEs) ex sE ad CE, & (ob similitudinem triangulorum CPM, GSE) sE ad GE, sive componendo has rationes, ut quadratum sE ad rectangulum GEC, seu ad rectangulum DEB. Igitur ex æquali erit SEq ad rectangulum BED, ut AQq ad BDq. Q. E. D.

LEMMA AD PROP. VIII.

SI *in axe hyperbolæ QA sumantur duo puncta V, & F, ita quidem ut rectangulum ex QV*
Fig. 40. *in VA, sive ex AF in FQ æquale sit quartæ parti illius rectanguli, quod fit ex transverso latere QA in rectum AL; junctæque fuerint ex V, & F ad puncta B, X, in quibus tangens lateralis MXB verticales tangentes secat, rectæ VB, FB; VX, FX*

1. *Erunt anguli BVX, BFX recti.*

2. *Æquales quoque erunt anguli XBF, XVF; tum æquales BFV, BXV.*

3. *Productis BF, VX, donec concurrant in H, quæ ex H ad punctum contactus M ducitur recta HM, tangenti MB erit perpendicularis.*

(d) *Per*
cor. 9. p. 4. Demonstratur 1. Pars. Rectangulum ex BQ in
buj. cap. AX (*d*) æquale est quadranti rectanguli ex latere
(e) *Per* transverso in latus rectum, & propterea æquale
constract. etiam erit rectangulo ex QV in VA, vel ex AF
(f) *Per* in FQ, cum hæc quoque (*e*) eidem quadranti æ-
16. l. 6. quentur. Ergo (*f*) erit BQ : QV :: VA : AX:

Sunt

Sunt etiam per hypoth. anguli BQV, VAX recti, & proinde æquales: igitur (*a*) erunt duo triangula BQV, VAX similia, & anguli VBQ, AVX æquales. His ergo addito communiter angulo BVQ, erunt duo anguli VBQ, BVQ pares duobus AVX, BVQ, seu uni BVX, qui ex illis duobus componitur: sed duo priores rectum unum efficiunt; ergo rectus etiam erit angulus BVX. Eodem modo cum æqualia sint rectangula AFQ, BQ in AX, erit (*b*) AF : AX :: BQ : QF; ac proinde ob æquales etiam angulos BQF, FAX, similia quoque erunt triangula FAX, BFQ, & æquales anguli BFQ, FXA. His ergo addito eodem angulo AFX, erunt duo anguli BFQ, AFX, sive unicus BFX æqualis duobus FXA, AFX. Sed hi uni recto sunt æquales; ergo rectus etiam erit angulus BFX. Quod erat primum.

(a) *Per 6.l.6.*

(b) *Per 16.l.6.*

II. Pars. Cum anguli BFX, BVX ostensi sint recti, si super BX veluti diametro circulus describatur, hic transibit per F & V, continebitque quadrilineum BFXV. In eo autem circulo duo anguli XBF, XVF eidem chordæ FX insistunt, in eodem segmento vertices habentes; proindeque (*c*) erunt æquales: & ob eandem rationem duo anguli BFV, BXV eidem chordæ BV insistentes, & in eodem segmento erunt etiam æquales. Quod erat alterum.

(c) *Per 21.l.3.*

III. Pars. Si HM perpendicularis non est tangenti MB, ducatur ex H ad eandem MB perpendicularis quæcunque HI, ordinataque ad axem MK, jungatur KI. Cum anguli BQV, BIH recti sint & æquales, ac æquales etiam anguli VBQ, IBH, utpote eidem AVX æquales, similia erunt triangula BQV, BIH; adeoque IB : BH :: BQ : BV; & alternando IB : BQ :: BH : BV. Sed ob similitudinem triangulorum HVB, HXF, est BH : BV :: HX : XF; ergo ex æquali erit IB : BQ :: HX : XF. Præterea ob rectos etiam angulos FAX, XIH, & æquales AXF, HXI utpote eidem BFV

æquales, similia erunt triangula FAX, XIH; & hinc erit IX : XH :: AX : XF; & permutando IX : AX :: XH : XF. Sed jam demonstravimus IB : BQ :: XH : XF; ergo ex æquali erit IB : BQ :: IX : AX; & permutando IB : IX :: BQ : AX. Sed (a) BQ : AX :: QK : KA; ergo erit etiam IB : IX :: QK : KA; & dividendo BX : XI : QA : AK, sive :: PX : XR, vel etiam (ob similitudinem triangulorum BXP, RXM) BX : XM. Igitur duæ rectæ XI, XM sunt æquales; ac propterea punctum I non est diversum ab M, alias sequeretur partem æquari toti, quod est absurdum. Quod erat tertium.

(a) *Per cor. 7. p. 4. huj. cap.*

PROPOSITIO VIII.

Fig. ead.

I*Isdem positis quæ in præcedenti lemmate; inclinatisque ex punctis V & F ad punctum contactus M rectis VM, FM, dico angulos ab iisdem inclinatis & tangente BM factos, scilicet angulos BMF, BMV esse æquales.*

Cum enim anguli BMH, BVH recti sint, ut modo demonstravimus, si super BH tanquam diametro circulus describatur, hic transibit per V & M, eruntque anguli BHV, BMV æquales utpote in eodem segmento, & eidem chordæ BV insistentes. Item cum recti etiam sint anguli XMH, XFH, si super XH tanquam diametro circulus describatur, is transibit per F, M, eruntque anguli FHX, FMX æquales, cum eidem chordæ FX insistant & in eodem segmento. Igitur cum duo anguli BMV, FMX æquales sint ipsis BHV, FHX æqualibus, vel iisdem, erunt & inter se æquales. Q. E. D.

CO-

COROLLARIA.

I. SI candelæ lumen in punctum V collocetur, ex quo ad convexam hyperbolæ AM superficiem radii incidant, ita iidem reflectentur, ut in puncto F sint collimantes. Ita si radius incidens fuerit VM, erit reflexus MZ, qui nempe intra curvam productus transiret per F. Nam cum juxta Catoptricæ leges angulus incidentiæ angulo reflexionis esse debeat æqualis, si radius incidens sit VM ita reflecti debet, ut qui inde fit angulus cum tangente BMS æqualis sit angulo incidentiæ VMB. Id autem tantum obtinet si reflexio fiat per rectam MZ, quæ producta tendit ad F; ita enim cum sit angulus incidentiæ VMB æqualis angulo BMF, & huic æqualis SMZ (*a*), erit idem angulus incidentiæ VMB æqualis angulo SMZ, qui proinde erit angulus reflexionis. Vicissim si in F collocetur candelæ fax, radii a concava hyperbolæ AM superficie reflexi ita incedent, ac si ex V provenirent. Sic si radius incidens sit FM, reflexus erit MG, qui nempe productus tendit ad V; hac enim ratione æquales fiunt incidentiæ, & reflexionis anguli, scilicet FMB, GMS. Hinc posita face in F videbitur ejus imago in V, & vice versa si ponatur in V, apparebit ejusdem imago in F.

(a) *Per* 15. *l.*1.

II. Hinc etiam patet, quod si radii ad convexam hyperbolæ AM superficiem ita convergentes incidant, ut ad punctum F tendant omnes, quemadmodum ZM, post reflexionem omnes unientur in V. Et si in concavam ejusdem hyperbolæ AM superficiem ita convergentes incidant, ut ad punctum V collimantes sint, post reflexionem unientur omnes in F. Unde intelligitur ratio, cur ejusmodi puncta F, & V, sectionum oppositarum *Foci*, vel *Umbilici* dicta sint; quod scilicet ibidem radii omnes in singula curvæ puncta inciden-

tes, colligantur, vel colligi appareant.

III. Facile autem determinari possunt ejusmodi puncta F, & V. Ex centro enim C ducto semiaxe conjugato CN, junctaque recta AN, ex C sumantur in axe CF, CV ipsi AN æquales, erunt F & V puncta quæsita. Rectangulum enim QFA cum ACq (*a*) æquatur CFq, seu ANq, seu (*b*) ACq + CNq; ablato ergo communi ACq, remanebunt æqualia rectangula QFA, & CNq. Et eodem modo constabit rectangulum AVQ quadrato CN æquari, seu quadranti illius rectanguli, quod fit ex latere transverso, & recto.

(a) *Per* 8. *l*.2.

(b) *Per* 47. *l*.1.

IV. Hinc etiam elegans ducendi tangentem ad quodvis hyperbolæ punctum M ratio deducitur. Inclinatis videlicet ex focis F, & V ad idem punctum M rectis FM, VM, recta MB ex M ducta angulum FMV bifariam dividens, erit tangens.

PROPOSITIO IX.

Fig. 44. *SI ex quolibet hyperbolæ puncto M ad focos V, & F rectæ inclinentur MV, MF, erit illarum differentia æqualis axi transverso QA.*

Iisdem ut in propositione antecedenti manentibus, ducantur insuper per centrum C, & per focum V, TN, VP, quæ inclinatæ FM sint paralellæ; junganturque VT, QT, TA. Jam vero angulus VMP æqualis est angulo (*c*) FMP, seu alterno VPM, ob VP, FM parallelas: igitur in triangulo VPM æqualia erunt latera PV, VM. Æquales sunt etiam rectæ PT, TM: (nam PT: TM :: VN : NM :: VC : CF, & VC = CF); est præterea TV in utroque triangulo PVT, TVM latus commune; ergo (*d*) eadem triangula erunt æquiangula, & anguli PTV, MTV æquales, & proinde recti. Sed rectus est etiam angulus VQB; ergo si super BV veluti diametro describatur circulus, hic transibit per Q & T, continebitque

(c) *Per prac.*

(d) *Per* 8. *l*.1.

qua-

quadrilaterum BVQT, & erunt anguli VBQ, VTQ (a) in eodem segmento æquales. Similiter si super XV tanquam diametro circulus describatur, ob rectos angulos VTX, VAX, transibit per T & A, eruntque anguli ATX, AVX eidem arcui insistentes æquales. Est vero angulus AVX æqualis angulo QBV seu QTV: ergo æquales etiam erunt anguli VTQ, ATX; & addito utrisque communi angulo QTX, fient æquales anguli VTX, QTA, eritque QTA rectus. Si itaque super QA ut diametro circulus describatur, transibit per T, eruntque tres rectæ, CQ, CT, CA ejusdem circuli radii, & proinde æquales. Præterea cum rectæ VM, VF, PM bifariam sectæ sint in N, C, T, erit etiam VP, vel VM dupla TN, & FM dupla CN. Ergo VM − FM erit dupla ipsius TN − CN, seu dupla ipsius TC, seu CA, vel CQ, ideoque VM − FM erit æqualis ipsi QA. Differentia ergo inclinatarum VM, FM axi transverso QA est æqualis. Q. E. D.

(a) Per 21. l. 3.

COROLLARIA.

I. HInc facile hyperbolam continuo motu ita describes datis ejus axe transverso BA, & distantia focorum FV. Nimirum in focis F, & V clavi aut paxilli figantur, in quorum altero V regulæ circa idem punctum V mobilis extremitas jaceat; alteri vero F fili CMF extremitas F adhæreat, altero sui extremo C regulæ alligato in C; eaque sit regulæ VC longitudo, quæ fili longitudinem superet axe transverso AB. Deinde vero immissus stylus in M ducatur intra filum CMF versus A, sic ut pars fili CM agglutinata quasi hæreat regulæ. Describetur hoc motu hyperbola, cujus foci V, F, & latus transversum AB. Nam cum differentia regulæ & fili sit AB; inter ducendum vero semper eadem pars CM ex utroque auferatur, residuorum VM, FM perpetuo eadem

Fig. 42.

dem

dem erit differentia, nempe æqualis AB.

II. Sed ex eadem hyperbolæ proprietate alter quoque subnascitur modus eam describendi, datis ejusdem focis V, F, & latere transverso BA, inveniendo sc. in plano quotvis ejus puncta. Centro videlicet V intervallo Vm majore BA describatur arcus; deinde facta VD æquali BA, centro F intervallo residuo mD describatur alter arcus priorem secans in m. Patet jam ob Vm — mF = AB punctum m esse in hyperbola.

Fig. 41. III. Si ex puncto contactus M ducatur tangenti MG perpendicularis ME axi occurrens in E, & ex foco F eidem ME parallela sit FI tangenti MG occurrens in K, & inclinatæ ex foco VM in I, erit axis transversus QA æqualis ei quæ ex eadem inclinata abscinditur portio VI. Ob parallelas enim EM, FK, anguli FKM, IKM recti sunt; æquales item sunt (*a*) anguli IMK, KMF, & latus KM commune; ergo (*b*) erunt etiam latera FM, IM æqualia; ideoque inclinatarum VM, MF differentia erit IV, & æqualis axi transverso AQ.

(a) *Per præc.*

(b) *Per* 26. *l.* 1.

IV. Est vero VI : VF :: VM : VE; hoc est, erit axis transversus ad distantiam focorum, ut inclinatarum altera MV ad axis partem foco V, & normali ME comprehensam.

SCHOLIUM.

QUæ hactenus de focis hyperbolæ demonstravimus nostris tironibus satis esse possunt: ad pleniorem autem eorum doctrinam hæc ulterius pro provectioribus addimus.

Fig. 43. I. Si ex foco hyperbolæ F ordinetur FM, quemadmodum in parabola, ita hic etiam æqualis ea est semiparametro. Sit enim BA axis transversus, & AQ parameter; & erit rect. BFA : FMq :: BA : AQ :: (*c*) rect. BA×AQ : AQq; & alternando rect. BFA : rect. BAQ :: FMq : AQq. Ergo quemadmodum rectan-

(c) *Per* 1. *l.* 6.

ctangulum BFA subquadruplum est rectanguli BAQ, ita quoque FMq quadrans erit AQq; & propterea FM lateris recti AQ pars dimidia erit.

II. Ductis ex M, & A tangentibus MT, AI sibi invicem in I occurrentibus, quemadmodum in parabola, ita etiam hic erit tangentis verticalis pars AI æqualis distantiæ foci a vertice, seu AF. Est enim rectangulum BFA ex hypothesi quarta pars rectanguli BAQ; ideoque æquale rectangulo ex dimidio transverso in dimidium lateris recti, hoc est, rectangulo AC×FM. Atqui eidem rectangulo BFA (*a*) æquale est rectangulum CFT: ergo æqualia erunt rectangula AC×FM, CFT; & (*b*) FC : CA :: FM : FT. Est vero (*c*) FC : CA :: CA : CT, & dividendo FA : AC :: AT : TC, & alternando FA : AT :: AC : TC :: (*d*) FC : CA. Ergo ex æquali FA : AT :: FM : FT :: AI : AT. Ergo (*e*) erunt AF, AI æquales.

III. Hinc in triangulo TFM latus TF latere FM minus erit. Nam cum sit (*f*) AF : FB :: AT : BT, erit alternando AF seu AI : AT :: FB : BT; ergo AI major AT; ideoque FM major quoque ipsa FT.

IV. Iisdem ut supra manentibus, ordinataque ad tangentem usque HD curvæ occurrente in E, erit HD æqualis ipsi FE, quæ scilicet ex foco F ad idem curvæ punctum E ducitur, quemadmodum in parabola idipsum contingere demonstravimus. Ducatur enim ex E tangenti parallela EN axi occurrens in N. Et erit (*g*) triangulum HNE quadrilineo HALO æquale, vel quadrilineo HTMO (æqualibus nempe (*h*) triangulo FTM, & quadrilineo FALM). Ab æqualibus autem triangulo HNE, & quadril. HTMO, ablato communi quadr. HNPO, reliqua erunt æqualia, scilicet triangulum OPE, & quadril. NTMP; iisdemque addito eodem quadrilineo EPMD, erit triangulum OMD æquale quadrilineo ENTD, hoc est, differentiæ triangulorum similium DTH, ENH. Igitur erit

(a) *Per cor.4.p.4. huj. cap.*
(b) *Per 16.l.6.*
(c) *Per cor.3.p.4. huj. cap.*
(d) *Per idem cor.*
(e) *Per 9.l.5.*
(f) *Per cor.7.p.4. huj. cap.*
(g) *Per lemm. ad p. 3. huj. cap.*
(h) *Per idem lem.*

qua-

quadrilineum ENTD ad triang. ENH, ut triang. OMD ad idem triang. ENH. Sed quadril. ENTD: triangulum ENH :: HDq − HEq (= rectang. KDE) : HEq (ob similitudinem triangulorum DTH, ENH). Ergo ex æquali erit triangul. OMD : triang. ENH :: rect. KDE : HEq ; & permutando rect. KDE : triang. OMD :: HEq : triang. ENH :: AIq : triang. ATI ; & iterum permutando rect. KDE : AIq :: triang. OMD : triang. TAI :: triang. OMD : triang. IML. (Nam ob quadril. AFML = triang. FTM. ablato communi FAIM, reliqua erunt æqualia, triang. scilicet ATI, & IML). Sed triang. OMD: triang. IML :: OMq : MLq :: HFq : FAq (= AIq) Ergo ex æquali erit rect. KDE : AIq :: HFq : AIq ; ideoque æqualibus consequentibus æqualia etiam erunt antecedentia, seu rectangulum KDE æquale erit FHq. Addito igitur communiter quadrato HE, erit rectang. KDE + HEq, hoc est (*a*) HDq = FHq + HEq, hoc est (*b*) FEq. Ergo tandem HD, FE æquales erunt.

(a) *Per* 6. *l.* 2.
(b) *Per* 47. *l.* 1.

V. Si itaque triangulum rectangulum TFM construatur, cujus latus FM majus sit FT, productisque lateribus TF, TM indefinite versus H & D interjiciantur plures rectæ ipsi FM parallelæ, ut HD, hd; & ex F ad ipsas transferantur FE, Fe ipsissimet HD, hd æquales; puncta E, e &c. erunt in hyperbola.

Fig. 44. VI. Si ad ductam ex puncto hyperbolæ R tangentem RG perpendicularis sit RP axi occurrens in P; & ex P inclinatæ ex foco FR perpendicularis sit PE, hæc, ut in parabola, abscindet partem ER æqualem semiparametro axis. Ducantur ex utroque foco F, V, & ex centro C tangenti RH perpendiculares FZ, VH, CM. In duobus triangulis PER, FRZ cum anguli ad E & Z sint recti, & æquales etiam alterni parallelarum ZFR, FRP, erunt eadem similia. Sed ob angulos VRH, ZRF æquales (*c*), & FZR, VHR rectos, sunt etiam

(c) *Per* 8. *huj. cap.*

etiam similia triangula VRH, ZRF: ergo & similia quoque erunt PER, VRH. Erit itaque RV: VH :: PR : RE; ideoque (*a*) æqualia rectangula RV×RE, VH×PR. Item FR : FZ :: PR : RE, ideoque æqualia etiam rectangula FRE, FZ×PR. Ergo rect. RV×RE − rect. FRE, hoc est, $\overline{VR-RF}\times RE$, hoc est (*b*) QN×RE = VH×PR − FZ×PR, hoc est = $\overline{VH-FZ}\times PR$. Jam vero juncta HF, cui occurrit CM in S, ob FV duplam FC, est etiam HV dupla CS, & FZ dupla SM; ergo VH − FZ erit etiam dupla $\overline{CS-MS}$, hoc est, dupla MC. Rectangulum itaque $\overline{VH-FZ}\times PR$ = rect. 2MC×RP; ideoque rectang. QN×ER = rectang. 2MC×RP. Ducatur præterea axis conjugatus AB, & ex R ad utrumque axem ordinetur RX, RO. Facile erit ostendere duo triangula CIM, PRO esse similia; ideoque esse PR : RO (= CX) :: CI : CM, & rect. PR×CM = rect. CX in CI. Sed per cor. 3. pr. 4. axi conjugato applicatum, est rect. CX in CI = CAq; ergo etiam PR×CM = CAq, & 2PR×MC = 2CAq = rect. ex latere transverso QN in dimidium recti. Ergo tandem rect. QN×ER = rect. ex QN in dimidium recti; ideoque ER erit semiparametro æqualis.

(a) *Per 16. l. 6.*

(b) *Per 9. huj. cap.*

VII. Iisdem positis erunt PF, PG, PV harmonice proportionales, hoc est, erit PF : PV :: FG : GV. Ob similia enim triangula FRZ, HRV, est FZ : VH :: ZR : HR. Sed est FZ : VH :: FG : GV, & ZR : HR :: RD : RV :: PF : PV; ergo ex æquali erit PF : PV :: FG : GV.

VIII. Si ex duobus hyperbolæ punctis R, H ad utrumque focum F & V rectæ inclinentur RF, HF; RV, HV; summa angulorum RFH, RVH, qui ab iisdem inclinatis fiunt, dupla erit anguli RNH, qui ex tangentibus eorundem punctorum RN, HN fit. In triangulo enim RVF angulus exter-

Fig. 45.

externus RFP æqualis eſt duobus internis VRF, RVF; additoque communiter RVF, erunt duo ſimul RFP, RVF æquales duobus RVF, & duobus etiam VRN (a). Sed duo anguli RVF cum duobus VRN duobus RGP (b) æquales ſunt, ſeu duobus TGN. Ergo duo ſimul RFP, RVF unius TGN dupli erunt. Eodem modo demonſtratur, ſummam angulorum HFP, HVP anguli HTF duplam eſſe. Igitur duo ſimul RFP, HFP, ſeu unicus RFH cum duobus ſimul RVP, HVP ſeu cum unico RVH duplam efficient ſummam duorum TGH, HTG, ſeu unius RNH.

(a) *Per* 8. *huj. cap.*
(b) *Per* 32. *l.* 1.

IX. Hinc ſi ex terminis unius rectæ EH ad hyperbolam terminatæ, & per focum F tranſeuntis tangentes ducantur EL, LH invicem in L occurrentes, fiet angulus ELH obtuſus. Hic enim æqualis eſſe debet ſemiſummæ duorum rectorum & anguli EVH, quæ recto major eſt.

Fig. 46. X. Diſtantia focorum FV eſt media proportionalis inter axem tranſverſum QA, & ſummam ejuſdem tranſverſi & recti AG, ſeu ipſam QG. Eſt quippe rectang. QFA quadranti rectang. QA×AG æquale; ideoque addito communiter CAq, erit (c) CFq = $\frac{1}{4}$ rect. QA×AG + CAq; & quadruplicando terminos, erit VFq = rect. QAG + QAq = (d) rect. AQG; ideoque (e) QA : VF :: VF : QG. Unde cum ſit quadratum axis conjugati DE æquale rect. QAG (f), erit VFq : DEq :: rect. AQG : rect. QAG :: (g) QG : AG; hoc eſt, erit quadratum diſtantiæ focorum ad quadratum axis conjugati, ut ſumma lateris tranſverſi & recti ad latus rectum.

(c) *Per* 6. *l.* 2.
(d) *Per* 3. *l.* 2.
(e) *Per* 27. *l.* 6.
(f) *Per cor.* 2. *p.* 5. *huj. cap.*
(g) *Per* 1. *l.* 6.

Fig. 47. XI. Inclinatarum ex focis F & V ad quodvis hyperbolæ punctum M, rectangulum VMF æquale eſt quadrato ſemidiametri CH, quæ conjugata eſt diametro MCS ad punctum M convenienti. Ducatur enim tangens MG axibus conjugatis occurrens in G & K; ipſi vero tangenti occurrat in N recta CN ex centro C ducta parallela inclina-

tæ

tæ VM. Jam juncta ex F ad N recta FN erit eidem tangenti NM perpendicularis (*a*): ideoque ob rectos angulos FNK, FCK, si super FK tanquam diametro circulus describatur, is transibit per C & N; eruntque adeo (*b*) rectangula FGC, KGN æqualia; & propterea (*c*) FG: GK :: GN: GC :: GM: GV; & (*d*) rect. FGV = rect. KGM. Itaque per quatuor puncta F, V, K, M transibit etiam circulus (*e*); ideoque anguli FKM, GVM eidem arcui insistentes erunt (*f*) æquales. Est etiam angulus FMK angulo GMV æqualis (*g*); ergo duo triangula FMK, GMV erunt similia; & proinde FM: MK :: GM: MV, & rectangulum FM×MV = rect. GM×MK. Eo ergo deducta res est, ut ostendatur rectangulum GMK quadrato CH æquari; quod ita demonstratur.

Axibus AQ, PB describantur hyperbolæ conjugatæ BV, PH, ad quas pertinent vertices diametri conjugatæ VCH, ut in schol. pr. 7. demonstravimus. Ex H ducatur tangens HT axi PB occurrens in T, item ducantur ordinatæ ad utrumque axem, nempe HO, HE. Ordinentur præterea ex P ad utramque diametrum VCH, MCS rectæ PR, PZ, parallelæ scil. ipsis MS, VH; aganturque demum ex M ad utrumque axem ordinatæ MI, MN. Jam vero ob similitudinem triangulorum CHT, CRP est CH: CR :: CT: CP :: (*h*) CP: CO; ideoque (*i*) duo triangula CRP, CHO æqualia erunt; & paria quoque triangula CZP, CEH iis (*k*) æqualia. Similiter cum sit MC: CZ :: KC: CP :: (*l*) CP, CI; erunt quoque duo triangula MCI, ZCP æqualia) cum latera reciproce proportionalia habeant circa angulos ZCP, ICM duorum rectorum summam constituentes, ut facile ex 14. l. 6. potest deduci); ideoque æqualia etiam triangula ZCP, CMN, CHE. Jam vero est triangulum CMN ad triangulum GMN, (*m*) ut CN ad GN, seu ut KI ad CI (nam CG: GN :: KG: GM :: KC: CI;

(a) *Per 9.huj.cap.*
(b) *Per 36.l.3.*
(c) *Per 16.l.6.*
(d) *Per 16.l.6.*
(e) *Per 35.l.3.*
(f) *Per 21.l.3.*
(g) *Per 8.huj.cap.*
Fig. 48.
(h) *Per cor.3.p.4.huj.cap.*
(i) *Per 15.l.6.*
(k) *Per 34.l.1.*
(l) *Per cor.3.p.4.huj.cap.*
(m) *Per 1.l.6.*

CI; & componendo CN : NG :: KI : CI) seu ut triangulum KMI ad triangulum CMI. Erit ergo alternando triang. GMN ad triang. CNM, seu triang. CHE ut triang. CMI, seu idem triang. CHE ad triang. KMI; ideoque ea tria triangula GMN, CEH, KMI continue proportionalia erunt.

(a) *Per 22. l. 6.* Sed sunt etiam similia; ergo (*a*) erit GM : CH :: CH : KM; ideoque (*b*) rect. KMG quadrato CH

(b) *Per 17. l. 6.* æquale.

Fig. 46. XII. Iisdem positis erit differentia rectanguli VRF inclinatarum scilicet a focis ad quodvis hyperbolæ punctum R, & quadrati semidiametri CR, quæ videlicet ad idem punctum R spectat, æqualis differentiæ dimidii quadrati axis transversi QA, seu dupli quadrati CA, & quadrati CF dimidiæ scilicet distantiæ focorum. Paucis: erit rect. VRF — CRq = 2ACq — CFq. Est enim in hyperbola VR — RF = QA; ideoque, ut ex 7. l. 2. facile liquet, VRq + RFq — 2VRF = QAq. Sed cum VF sit in

(c) *Per 12. & 13. simul l. 2.* C bifariam secta, est (*c*) VRq + RFq = 2RCq + 2CFq; ergo erit 2RCq + 2CFq — rect. 2VRF = QAq, & omnia dimidiando erit RCq + CFq — rect. VRF = 2CAq; ac tandem auferendo utrimque CFq, erit RCq — rect. VRF = 2CAq — CFq. Q. E. D. Patet itaque quantitatem RCq — rect. VRF constantem esse.

XIII. Est autem rectangulo VRF (ut supra n. 11. demonstratum est) æquale quadratum CH, seu quadratum semidiametri conjugatæ ad CR: ergo erit CRq — CHq = 2CAq — CFq. Præterea CAq

(d) *Per 6. l. 2.* (*d*) = CFq — rect. QFA = CFq — CEq; ergo 2CAq — CFq = CAq + CFq — CEq — CFq = CAq — CEq. Itaque cum sit CRq — CHq = 2CAq — CFq, erit etiam CRq — CHq = CAq — CEq; & quadruplicatis terminis, erit differentia quadratorum duarum quarumvis conjugatarum diametrorum differentiæ quadratorum axium æqualis.

XIV. Cum itaque hyperbola æquilatera axem transversum habeat suæ parametro, ac proinde axi

conju-

conjugato æqualem, singulæ quævis diametri suis conjugatis erunt æquales, cum nulla sit earundem quadratorum differentia. Hinc etiam singulis diametris suæ etiam parametri æquantur.

SCHOLIUM II.

EX iis quæ hactenus sunt demonstrata colligi potest hyperbolam aptissimam esse figuram, ut juxta ejus curvaturam tornatæ lentes radios lucis, quos parallelos excipiunt, ad datum in earum axe punctum colligi faciant. Quod ut a nostris tironibus intelligi possit, nonnulla hic ex Dioptrica sunt prælibanda. I. Lucis radius veluti LM ex medio in aliud diversæ densitatis transiens, puta ex aere in vitrum, vel vicissim, si perpendiculariter alterius medii superficiem subeat, cursus sui directionem non mutabit, sed per LM productam incedet. At si in eandem superficiem oblique incidat, statim in ipso incidentiæ puncto veluti frangitur, a priori semita recedit, motumque suum per aliam lineam puta MV deinceps prosequetur; quæ lucis refractio *dicitur. II. Ad idem punctum incidentiæ M superficiei MA, quæ duo media dividit, perpendicularis EMR ducatur, (quæ eadem est ac perpendicularis tangenti MG ex eodem puncto M ducta): spectenturque duo anguli LME, VMR, qui vid. fiunt a radio incidente ML, & refracto VM cum eadem perpendiculari; eorum prior LME* angulus incidentiæ, *alter vero VMR* angulus refractionis *dicitur. III. Pluribus radiis ita incidentibus, & refractis, quæ ratio sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis in uno radio reperitur, eandem esse constat sinuum singulorum incidentiæ angulorum ad respondentes sinus refractorum; quod præter constantem experientiam dioptrica ratio etiam evincit. IV. Radiis ex aere in vitrum transeuntibus ea constans sinuum ratio repetitis experimentis inventa est, quæ 3. ad 2. seu $\frac{3}{2}$; vicissim iisdem transeuntibus ex vi-* Fig. 41.

tro in aerem, ea sinuum ratio est quae 2 ad 3 seu $\frac{2}{3}$. V. Posito LM pro radio incidente axi EA parallelo, & pro refracto MV axi occurrente in V, ductaque perpendiculari EMR, angulus incidentiae LME ob parallelas LM, EQ, aequalis est angulo E, qui in triangulo MEV lateri NV opponitur, seu radio refracto MV. Angulus vero refractus VMR cum complementum sit anguli EMV ad duos rectos, idem erit utriusque sinus. VI. Sunt praeterea sinus angulorum cujuscumque trianguli, ut latera iisdem opposita; ideoque erit sinus anguli incidentiae LME, vel MEV ad sinum anguli refractionis VMR, vel anguli EMV, ut latus MV, quod opponitur angulo MEV, ad latus VE quod opponitur angulo VME, seu ut radius refractus MV ad distantiam VE, puncti scilicet V ubi radii colligi debent, & puncti E ubi perpendicularis axi occurrit. Posito itaque quod radius LM a vitro transiens in aerem post refractionem tendat in V, esse debet MV ad VE ut 2 ad 3.

Eo ergo deducta res est, ut talis naturae curva inveniatur, ex cujus puncto M ubivis in ejus perimetro assumpto ducta ad axem usque normali ME, & MV ad datum in eodem axe punctum V, rectarum VM, VE constans sit ratio, eaque quae 2 ad 3.

Hanc vero curvam esse hyperbolam facile ex hactenus demonstratis colligitur. Ostensum siquidem est cor. 4. prop. 9. quae ex foco remotiori V hyperbolae AM ad eandem inclinatur rectam VM esse ad VE axis scilicet partem foco V & normali E interceptam; ut, axis transversus ad distantiam focorum; quae sane constans & immutabilis ratio est.

Id igitur reliquum est, ut ex infinitis hyperbolis ea inveniatur, in qua ratio axis transversi ad distantiam focorum eadem sit, quae 2 ad 3. Jam vero distantia focorum est media proportionalis (a) inter axem transversum, & summam lateris transversi

(a) Num. 10. schol. antec.

&

& recti. Si itaque datis numeris 2 & 3 inveniatur tertius proportionalis $4\frac{1}{2}$ assumto 2 pro axe transverso, erit $4\frac{1}{2}$ summa transversi & recti, & latus rectum $2\frac{1}{2}$. Descripta igitur hyperbola AM in qua axis transversus ad suam parametrum eandem servet rationem, quæ 2 ad $2\frac{1}{2}$ ordinataque MH, si spatium AMH coordinatis AH, HM, & curva AM comprehensum circa AH revolvatur, solida inde orietur figura, juxta quam tornatæ lentes datum præstabunt effectum, radios scilicet axi NS parallelos, & plana vitri facie MH perpendiculariter exceptos ad datum punctum V colligent.

PROPOSITIO X.

SI ex recta DE, quæ hyperbolam tangit in vertice A sumantur ejusmodi æquales partes AE, AD, quæ rectam DE efficiant diametro conjugatæ BP æqualem; aganturque per centrum C & puncta D, E rectæ CD, CE; hæ utcunque protractæ semper magis ac magis ad hyperbolam accedent, quin tamen uspiam cum ea conveniant. Fig. 49.

Ex quovis hyperbolæ puncto L diametro QK ordinetur LK curvæ ex altera parte occurrens in I, rectis vero CD, CE in M, H. Jam vero est ob hyperbolæ naturam rectangulum QKA ad KLq; ut QAq. ad DEq., vel (sumtis horum quadrantibus) ut CAq. ad AEq. Sed ob similitudinem triangulorum KCM; ACE, est ACq ad AEq, ut CKq ad KMq; ergo ex æquali erit CKq. ad KMq, ut rect. QKA ad KLq; tum (*a*) CKq — rect. QKA ad KMq. — KLq. ut CKq, ad KMq, seu ut CAq ad AEq. Est vero CKq. — rect. QKA = CAq. (*b*) & (*c*) KMq — KLq. = rect. HLM; erit ergo CAq ad rect. HLM, ut CAq ad AEq; & propterea AEq = rect. KLM; & (*d*) HL : AE :: AE : LM. At-

(a) *Per* 19. *l.* 5.
(b) *Per* 6. *l.* 2.
(c) *Per* 5. *l.* 2.
(d) *Per* 17. *l.* 6.

qui hyperbolam producendo, ordinata KI, multoque magis KH, vel HL, quæ est prima proportionalis, in infinitum augeri potest; ergo manente eadem AE, quæ est media proportionalis, tertia proportionalis LM in infinitum decrescere debebit; adeoque ad hyperbolicam curvam semper magis accedet recta CM, quamvis eidem numquam possit occurrere, existente semper inter curvam & rectam CM segmentum aliquod LM, quod cum alio HL rectangulum efficit æquale quadrato AE. Eodem modo constat rectam CD accedere semper ad curvam nunquam vero cum ea convenire: hinc ejusmodi rectæ CD, CE hyperbolæ *Asimptoti* vel *non-concurrentes* dictæ sunt.

COROLLARIA.

I. Iisdem rectis CD, CE ultra C productis abscindentur ab oppositi verticis tangente segmenta FQ, QO, ipsis AE, DA, adeoque & inter se æqualia, ob similitudinem scilicet triangulorum ACE, FCQ, & DCA, QCO, quorum æqualia sunt latera CA, CQ: ideoque patet rectas CF, CG esse etiam oppositæ sectionis NQ asymptotos, cum illius idem sit latus transversum & rectum, ac hyperbolæ IAL.

II. Quod si intra angulum DCE uni asymptoto CH parallela ducatur pf; vel si ex centro C recta sit Cu angulum DCK dividens, utraque hyperbolæ occurret. Intervallum enim parallelarum idem semper manet; at quod intercedit inter hyperbolam & asymptotum minus fit quocunque dato; ergo etiam minus intervallo parallelarum. Recta vero Cu ab asymptoto CH magis semper ac magis recedit, cui tamen continenter hyperbola accedit: utraque ergo pf, Cu hyperbolæ occurrere debet.

III. Quæ hinc inde intercipiuntur inter curvam & asymptotos partes ordinatæ HI, LM, æquales esse

esse oportet: nam si ab æqualibus HK, KM, æquales auferantur IK, KL, reliquæ æquales esse debent, scil. HI, LM: unde etiam patet æqualia esse rectangula MIH, HLM.

IV. Quævis rectangula HLM, hlm ordinatarum partibus per ipsam curvam & asymptotos abscissis contenta æqualia inter se sunt; singula enim quadrato AE æquantur.

PROPOSITIO XI.

Si per duo quævis hyperbolæ puncta L, i ducatur recta ZX curvam secans in L, i asymptotis vero occurrens in Z, X; erunt rectangula ZLX, XiZ, æqualia; itemque abscissæ partes Xi, LZ æquales. *Fig. 49.*

Ductis enim ex L, i tangenti verticali DE parallelis HM, hm, fiunt duo rectangula HLM, him æqualia (*a*). Est vero rectangulum HLM ad rect. him in ratione composita HL ad hi, & LM ad im, seu (ob similitudinem triangulorum HXL hXi, & LZM, iZm) XL ad Xi, & LZ ad Zi, hoc est, ut rectangulum XL in LZ ad rect. Xi in iZ. Ergo æqualibus rectangulis HLM, him, æqualia etiam erunt XiZ ZLZ. Ob hanc vero rectangulorum æqualitatem est (*b*) XL: Xi:: iZ: LZ, & dividendo iL: Xi:: iL: LZ; ergo Xi, LZ sunt æquales.

(a) *Per cor. 4. preced.*

(b) *Per 16. l. 6.*

COROLLARIA.

I. Hinc si hyperbolæ tangens ducatur TV, cui ipsa XZ sit parallela, sitque R punctum contactus, ejus partes RV, RT asymptotis terminatæ erunt æquales. Si enim XZ motu sibi parallelo sursum ferri concipiatur, duo sectionis puncta, i, L magis semper ac magis sibi invicem accedent, ac tandem iisdem in unum R coinci-

dentibus, XZ evadit tangens TV, ejusque partes æquales Xi, LZ evadunt tangentis segmenta TR, RV, quæ proinde æqualia esse oportet.

Fig. 50. II. Hinc facilis habetur methodus datis asymptotis CQ, CO, hyperbolam describendi per datum punctum L transeuntem. Ex hoc enim puncto plurimæ sint rectæ NK, PI, QH &c. rectis CQ, CO terminatæ. Tum abscindatur in NK pars NR æqualis LK, in PI pars PG æqualis LI, in QH pars QF æqualis LH &c. Patet jam per puncta R, G, F, &c. hyperbolam transire asymptotos habentem CQ, CO, eamque in L contingere rectam MO, quæ videlicet ipsis CQ, CO terminata bifariam in L secatur.

Fig. 49. III. Ducta per centrum C, & punctum contactus R diametro CR, erit tangens TV æqualis diametro conjugatæ, quæ ad eandem CR pertinet. Alias enim TV ea diametro conjugata major vel minor foret; ideoque ex R sumtis in eadem duabus æqualibus partibus summam ei diametro conjugatæ æqualem constituentibus, earum terminantia puncta vel intra angulum TCV, vel extra caderent; atque per illa & centrum C ductæ rectæ oppositarum sectionum IAL, QN essent quoque asymptoti; quod repugnat corollario 2. præc.

IV. Hinc etiam colligitur rectangulum XLZ vel XiZ. quadrato TR, seu quadrato semidiametri conjugatæ æquari.

V. Ac tandem constat præter asymptotos CH, CM nullas alias dari posse lineas ejusdem proprietatis. Ex quovis enim curvæ puncto ducta tangens æqualiter hinc inde ex eodem puncto terminata, & æqualis diametro conjugatæ illius diametri, quæ transit per punctum contactus, iisdem rectis CH, CM terminatur.

SCHO-

SCHOLIUM.

HYperbolarum asymptotos, ceterarumque curvarum communiter Geometræ habent veluti tangentes in earum punctis infinite a centro remotis. Quam hypothesim a vero non abludere ex iis quæ hactenus de hyperbolæ tangentibus, & asymptotis sunt demonstrata colligi facile poterit. Tangat quippe hyperbolam recta TM diametro occurrens in T: si abeunte in infinitum puncto contactus M, demonstrari posset rectam TA, æqualem esse ipsi CA, punctumque T ad C accedere, tum tangentis verticalis partem AX semidiametro conjugatæ æquari, nullus amplius erit ambigendi locus quin ea tangens TM sit hyperbolæ asymptotus. Utrumque vero ita facile ostenditur. Ducta ex M diametro ordinata MP, erit (*a*) CP : CA :: CA : CT. Sed abeunte puncto M in infinitum recta CP fit etiam infinita; ergo manente eadem CA, necesse est rectam CT fieri infinite exiguam, punctumque T cum C confundi. Præterea in eadem hypotesi evanescente QA & infinite exigua magnitudine facta respectu AP, rectangulum QPA æquivalens fit quadrato PC, hocque pro illo poterit adhiberi. Est vero rect. QPA ad PMq, ut QAq. ad quadratum diametri conjugatæ, seu ut CAq. ad quadratum semidiametri conjugatæ: ergo erit etiam CPq, ad PMq, ut CAq ad quadratum semidiametri conjugatæ. Sed accedente puncto T in C est CPq. ad PMq, ut CAq. ad AXq: ergo erit ex æquali CAq. ad quadratum semidiametri conjugatæ, ut CAq. ad AXq; ideoque AX erit eadem semidiameter conjugata.

Fig. 36.

(a) *Per cor. 3. pr. 4. huj. c.*

PROPOSITIO XII.

Fig. 49. *SI quævis linea NL hyperbolas oppositas in N, L, earum vero asymptotos in G, S secet, eique parallela sit ex centro ducta diameter QCA; erit rectangulum GLS quadrato semidiametri CA æquale; interceptæque partes NG, LS erunt pariter æquales.*

Ducatur ex A tangens DAE asymptotis in D & E occurrens, eidemque sit parallela HM per punctum L ducta, curvæ in I, L, asymptotis vero in H, M occurrens. Jam vero duo triang. CAE, SLM sunt similia, tum similia quoque CAD, GLH; ideoque erit GL: LH:: CA: AD (=AE) (a), & SL: LM :: CA : AE. Præterea rectang. GLS est ad rectangulum HLM in ratione composita GL ad LH, & SL ad LM, seu in ratione composita CA ad AE, & iterum CA ad AE, seu ut quadratum CA ad quadratum AE, cum hæc quoque ratio duplicata sit ejusdem CA ad AE. Ergo cum quadratum AE rectangulo HLM (b) sit æquale, erit etiam rectangulum GLS quadrato CA æquale. Eodem ratiocinio probatur rectangulum SNG quadrato CQ vel CA æquari; ideoque æqualia etiam erunt duo rectangula GLS, SNG, & (c) propterea LG: GN:: NS : SL, seu componendo LN : GN:: LN: SL. Ergo æqualibus antecedentibus, æqualia etiam erunt consequentia, scilicet SL, GN.

(b) *Per cor.* 1. *p.* 11. *huj. c.*

(a) *Per* 9. *hujus.*

(b) *Per* 16. *l.*6.

COROLLARIA.

I. DUcta quavis alia nl ipsi NL parallela hyperbolis oppositis in n, l, asymptotis vero in g, s occurrens, erit etiam rectangulum gls, vel sng quadrato CA æquale: unde patet ejusmodi rectangula constantis esse magnitudinis.

II. Si

II. Si æqualibus NG, SL addatur communis GS, æquales resultabunt GL, NS; ideoque rectangula GLS, NSL erunt æqualia, quemadmodum & rectangula SNG, LGN; proinde singula quoque rectangula NSL, nsl ejusdem & constantis erunt magnitudinis, æqualia scilicet CAq.

PROPOSITIO XIII.

SI in hyperbola sumantur duo puncta R, L, ex quibus ad asymptotos CD, CG rectæ ducantur ER, RK; LB, LF; ita tamen ut quæ ad unam asymptotum terminantur sint inter se parallelæ; itemque parallelæ quæ ad aliam spectant asymptotum: erit rectangulum earum quæ ex uno puncto ducuntur, nempe FL, LB, æquale rectangulo illarum quæ ex alio puncto excitantur, nempe ER, RK. *Fig.* 51.

Ducatur enim per R & L recta DG asymptotis occurrens in D & G. Ob æquales rectas DR, LG (*c*) erunt etiam æquales DL, RG, & RG: LG :: LD: DR. Præterea cum sit LB ipsi RK parallela, erit RG: LG :: RK: LB; & cum RE sit parallela, ipsi LF, est quoque LD: DR :: LF: RE; ideoque ex æquali erit RK: LB :: LF: RE, & (*d*) rectangulum BK x RE æquale rectangulo LB x LF. (a) *Per pr.* 11. *hujus cap.* (b) *Per* 16. *l.*6.

COROLLARIA.

I. SI duo puncta R, l, assumta fuerint in hyperbolis oppositis, eademque lege ductæ sint RE, RK; lb, lf; erit etiam rectangulum ERxRK = rect. blxlf; quod simili demonstratione evinci potest, ducta Rl, & pro prop. 11. adhibendo propositionem 12.

II. Si vero quæ ad unam asymptotum spectant LB, RK non tantum sibi, sed alteri asymptoto PC sint parallelæ; rectæ item LF, RE ad asymptotum *Fig.* 52.

ptotum PC terminatæ, alteri quoque asymptoto CN sint parallelæ, erunt parallelogramma FLBC, ERKC æqualia. Cum enim sit RK : LB :: FL :

(a) *Per* ER, erit quoque (*a*) EC : FC :: CB : CK ; &

34. *l.* 1. propterea parallelogramma FLBC, ERKC circa communem angulum C habebunt latera reciproce

(b) *Per* proportionalia, ideoque (*b*) erunt æqualia ; eorum-

14. *l.* 6. que dimidia triangula RCK, CLF erunt etiam æqualia.

III. Quæ itaque uni asymptoto PC sunt parallelæ RK, LB, reciprocam rationem habent suarum distantiarum a centro C; est enim RK : LB :: CB : CK; itemque ER : FL :: FC :: EC.

IV. Ductis præterea ex R, & L usque ad asymptotos tangentibus PQ, MN, erunt etiam triangula MCN, PCQ æqualia. Cum enim MN bifa-

(a) *Per* riam sit secta in L (*c*), sitque LF parallela CN,

cor. 1. *p.* & LB parallela MC, erit etiam MC bifariam in

11. *huj. c.* F secta, & bifariam quoque in B recta CN; ideoque quatuor triangula MLF, FLC, CLB, BLN æqualia erunt. Eodem modo demonstratur æqualia quoque esse triangula QRK, KRC, CRE, ERP. Duo igitur triangula PCQ, MCN quadrupla sunt æqualium triangulorum CRK, CFL; igitur & inter se erunt æqualia.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 53. *SI axibus conjugatis QA, DB quatuor describantur hyperbolæ conjugatæ AR, QL, DH, BG; sintque duæ quævis aliæ diametri conjugatæ HG, RL. Dico rectangulum IKEM, quod fit ex tangentibus, quæ ducuntur ex terminis axium, æquari parallelogrammo PNFS, quod fit ex tangentibus abs terminis diametrorum HG, RL ductis.*

Sint oppositarum hyperbolarum AR, QL communes asymptoti IE, MK; eritque proinde tangens IK per terminum axis transversi A transiens & asym-

asymptotis terminata axi conjugato DB parallela & æqualis (*a*). Ergo quæ ex terminis D, B ejusdem axis conjugati ducuntur tangentes DI, BK, axi transverso AQ parallelæ, in iisdem asymptotorum punctis I, K cum recta IK concurrere debent. (Si enim alibi quam in I & K asymptotis occurrerent, ductis ex D & B ad I & K rectis DI, BK, eæ cum æquales inter se forent, tum sibi & axi QA parallelæ (*b*). Sed quæ ex B, & D ducuntur tangentes eidem axi AQ parallelæ sunt; ergo ex punctis B, D binæ parallelæ eidem axi QA duci possent; quod est absurdum). Eædemque tangentes ex altera parte productæ cum tangente ME in iisdem asymptotorum punctis M, E convenient per eandem rationem. Patet ergo rectangulum MIKE, quod fit ex tangentibus ductis ab extremis axium punctis, asymptotis IE, MK terminari, ac esse tangentes IM, KE axi transverso AQ æquales. Eodem modo probatur tangentes NP, FS quæ ducuntur ex terminis diametri conjugatæ HG concurrere cum tangentibus NF, PS ductis ex terminis diametri RL in iisdem asymptotorum punctis P, N, F, S; ac esse NP, FS ipsi RL æquales. Sed axis AQ cui æquantur tangentes MI, EK, est relate ad hyperbolas DH, BG axis conjugatus; itemque RL cui æquantur tangentes NP, FS relate ad easdem hyperbolas, est diameter conjugata. Ergo (*c*) rectæ MK, IE hyperbolarum quoque DH, BG erunt asymptoti. Est vero triangulum MCE triangulo PCS æquale (*d*); itemque triangulum ICM triangulo PNC æquale (*e*); ideòque & æqualia quoque triangula MIE, NPS. Sed hæc dimidia sunt rectanguli MIKE, & parallelogrammi SPNF. Ergo hæc quoque æqualium dupla inter se æqualia erunt.

(a) *Per co.3.p.11. huj. cap.*

(b) *Per 33.l.1.*

(c) *Per 10. hujus cap.*

(d) *Per coroll. 4. præc.*

(e) *Per idem cor.*

COROL-

COROLLARIA.

I. Si puncta Q, B jungantur recta QB, asymptoto MK ea erit parallela. In eodem enim asymptoti puncto E convenientibus tangentibus ME, KE, fiet ex iis & asymptoto MK triangulum MEK; in quo ob bisecta latera ME, EK in Q, & B (*a*) erit MQ: QE :: KB: BE; ideoque (*b*) QB, ipsi MK parallela. Eodem modo juncta LG demonstratur asymptoto MK esse parallela.

(a) *Per co.1.p.11. huj. cap.*
(b) *Per 2. l.6.*

II. Junctis ergo quatuor punctis extremis axium conjugatorum, A, D, Q, B, itemque punctis extremis diametrorum conjugatarum R, H, L, G, duo fient parallelogramma, quæ cum æqualium IMEK, NPSF sint dimidia, erunt etiam & ipsa æqualia.

III. Junctæ QB, LG asymptoto PF parallelæ bifariam ab altero asymptoto IE secantur in V, O. Eæ enim diagonales lineæ sunt parallelogrammorum CQEB, CLSG, quorum asymptotus CS alteram diagonalem constituit: in quovis vero parallelogrammo duæ diagonales bifariam se invicem secant.

PROPOSITIO XV.

Fig. 33. *Si ad eandem diametrum NK eodem latere transverso QN describatur hyperbola NG, cujus parameter NA, & hyperbola NO, cujus parameter NE; sitque NX media proportionalis inter NA, & NE; erit spatium hyperbolicum NGK ad spatium hyperbolicum NOK, ut NA ad NX.*

(c) *Per cor.2. p.1. huj. cap.*

Est enim (*c*) KGq: rect. QKN :: AN: NQ; item rect. QKN: KOq :: NQ: NE; ergo ex æquo ordinate KGq: KOq :: NA: NE :: NAq: NXq(*d*); ideoque (*e*) KG: KO :: NA: NX. Similiter erit etiam

(d) *Per 20. l.6.*
(e) *Per 22. l.6.*

etiam LP : LS :: NA : NX; atque ita semper. Ergo spatia ipsa hyperbolica NGK, NOK, quæ ex iis lineis veluti coalescunt, erunt etiam ut NA, NX.

COROLLARIA.

HInc dato latere transverso QN describi potest hyperbola NSO, cujus spatium NOK sit ad spatium NGK alterius datæ hyperbolæ, cujus parameter est NA, & latus transversum QN, in data quavis ratione, puta AN ad NX. Sit enim NE tertia proportionalis post NA, NX, eaque ut parametro, eodem latere transverso QN describatur hyperbola NSQ: hæc erit quæsita.

PROPOSITIO XVI.

Si in asymptoto CD sumantur tres rectæ continue proportionales CA, CB, CD; & ex punctis A, B, D ducantur rectæ AM, BK, DH alteri asymptoto CL parallelæ hyperbolam in punctis M, K, H secantes; spatia hyperbolica ipsis intercepta erunt æqualia. *Fig. 54.*

Ductis ex punctis hyperbolæ H, K, M rectis HE, KI, ML usque ad asymptotum CL, & alteri asymptoto CD parallelis, compleantur parallelogramma CEHD, CIKB, CLMA; junganturque CF, FK, KN; tum CM, CH, ac tandem MH. Jam vero cum duo parallelogramma CLMA, CIKB æqualia sint (*a*), & circa communem angulum in C, erit (*b*) LC : IC :: CB : CA. Sed ex hypoth. CB : CA :: CD : CB; ergo ex æquali LC : IC :: CD : CB; & propterea parallelogramma ICBK, LCDN (*c*) erunt circa communem diametrum CKN. Similiter cum duo parallelogramma CLMA, CEHD sint æqualia (*d*), & circa communem angulum in C, erit etiam CL : CE:: CD:

(a) *Per co.2.p.13. huj. cap.*

(b) *Per 14. l.6.*

(c) *Per 26. l.6.*

(d) *Per co.2.p.13. huj. cap.*

CD : CA, eruntque ea similia & circa communem diametrum CFN. Tres ergo rectæ GF, CK, CN erunt in directum, & ob MH bifariam in P sectam, erunt duo triangula MCP, HCP æqualia. Jam vero quemadmodum MH bifariam in P dividitur, etiam singulæ ei parallelæ a P usque ad K hyperbola MKH terminatæ bisectæ quoque erunt ab eadem diagonali CN; eruntque proinde duo spatia hyperbolica MKP, HKP inter se æqualia; hisque ab æqualibus triangulis MCP HCP sublatis, reliqua etiam triangula hyperbolica MCK, HCK erunt æqualia. Sunt præterea duo triangula CKB, CHD æqualia (*a*): hinc ablato communi triangulo COB, remanebunt æqualia triangulum CKO, & quadrilineum BOHD; hisque addito spatio curvilineo KOH, erit triangulum hyperbolicum KCH spatio hyperbolico BKHD æquale. Eodem modo demonstratur triangulum hyperbolicum KCM spatio hyperbolico AMKB æquari. His ergo triangulis KCH, KCM æqualibus, æqualia etiam erunt spatia ipsa hyperbolica AMKB, BKHD.

(a) *Per co.2.p.13. huj. cap.*

COROLLARIA.

Fig. 55. I. Hinc si in asymptoto CV sumantur in eadem continua proportione CA, CB, CL CD, CH, &c., respondentia spatia hyperbolica IABM, MBLK, KLDN, NDHO, &c. semper erunt æqualia. Quamobrem cum in eadem CV utpote infinita possit eadem linearum proportio per quotvis terminos continuari, poterit quoque hyperbolicum spatium quodcumque IABM per quemvis numerum multiplicari. Ita e. g. si desideretur ejus spatii quadruplum, ratio CA ad CB per alios tres terminos CL, CD, CH continuetur, & erit spatium IAHO alterius IABM quadruplum.

II. Spatium ergo inter asymptotum & hyperbolicam curvam comprehensum magnitudinis est absolute

solute infinitæ, cum possit in eo spatium adsignari alterius dati & finiti spatii, puta IABM quantumvis multiplex, seu illo infinite majus.

III. Si in asymptoto CV fuerit CA : CB :: CD : CH, erunt spatia hyperbolica IABM, NDHO æqualia. Posita enim CL media proportionali inter CB, CD, erit CLq. = rect. CB×CD (*a*). Sed huic rectangulo æquatur etiam rectangulum CA×CH (*b*); ergo etiam CLq = rect. CA×CH; ideoque CL media proportionalis (*c*) inter CA, CH, & spatia IALK, KLHO æqualia; quemadmodum & spatia MBLK, KLDN. His ergo ab illis sublatis, reliqua spatia IABM, NDHO erunt æqualia.

(a) *Per* 17. *l.* 6.
(b) *Per* 16. *l.* 6.
(c) *Per* 17. *l.* 6.

IV. Patet itaque datum spatium hyperbolicum IAHO per unam mediam proportionalem CL inter CA, CH bifariam dividi in spatia IALK, KLHO æqualia; per duas medias proportionales, tres, vel quatuor inter easdem CA, CH, idem spatium IAHO in tres, quatuor vel quinque partes æquales secari, & ita porro.

V. Quæ de ejusmodi spatiis seu quadrilineis hyperbolicis dicta sunt sectoribus etiam ICM, MCK &c. quadrant: hæc enim illis sunt æqualia.

SCHOLIUM.

Nobilissimam hanc hyperbolæ proprietatem Veteribus ignotam primus demonstravit Cl. Gregorius a S. Vincentio in præclaro ejus opere de Quadratura Circuli & sectionibus Conicis. *Atque inde Geometris innotuit hyperbolam Apollonianam unam esse ex Logarithmicis Curvis, in quibus videlicet duæ magnitudinum series sibi invicem respondentes spectari possunt, una in geometrica, altera vero in arithmetica progressione procedens. Si enim in asymptoto CV sumatur series geometricè proportionalium cresentium CA, CB, CL, CD &c., his respondentia quadrilinea IABM, IALK, IADN, IAHO &c. progressionem dabunt arithmeticam, ideo-*

que

que linearum geometrice crescentium CA, CB, CL, &c. logarithmi appellantur. Si CA habeatur ut unitas, & progressionis geometricæ initium; reliquæ vero lineæ CB, CL, CD, CH &c. referant numeros 10. 100. 1000. 10000. &c. in progressione geometrica crescentes; erit spatium IABM log-us numeri 10., IALK log-us numeri 100., & ita porro; unitati vero CA cum nullum spatium respondeat, ejus log-us erit 0: hinc si spatium IABM dicatur m, erit series log-orum 0, m, 2m, 3m, 4m, &c.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 56. *SI in hyperbola NM axis transversus NQ quadruplus sit lateris recti QL; tum ad eundem axem describatur ex eodem vertice N parabola NB, cujus latus rectum sit æquale semiaxi transversa CN; sitque ex C ipsi QN normalis CT, ex cujus puncto quovis D parallela axi ducatur DMB parabolæ occurrens in B, hyperbolæ verò in M: dico spatium hyperbolicum DCNM æquari rectangulo ex abscissa curva parabolica NB in ejus parametrum CN.*

Sumatur in CT punctum E ipsi D infinite propinquum, ex quo recta ducatur EmI ipsi DMB parallela parabolæ occurrens in I, hyperbolæ vero in m. Quæ inter DB, EI intercipitur parabolæ portio BI infinite quidem exigua magnitudo est, ac pro recta haberi potest, quæ producta axi occurrat in G parabolam tangens in B: juxta enim recentiorum Geometrarum receptissimam hypothesim curvæ omnes veluti totidem polygona habentur infinitorum, & infinite exiguorum laterum, quorum unumquodvis si producatur, curvæ tangentem constituit. Ducatur præterea ex eodem puncto B tangenti BG normalis BP axi occurrens in P, eaque producatur in K, donec PK ipsi PB sit æqualis;

tum

rum ex K axi parallela ducatur KR, cui occurrat in R, quæ ex B ad axem ordinatur BA. Jam vero ob AP parallelam ipsi RK in triangulo RBK, quemadmodum BK bifariam secta est in P, ita quoque BR dupla erit ordinatæ BA, & RK dupla quoque subnormalis AP, seu æqualis parametro (*a*) ipsius parabolæ NB, hoc est æqualis CN: ideoque BKq, quod (*b*) æquale est BRq + RKq, æquale etiam erit quadruplo quadrati AB, seu quadrati XM, & quadrato CN. Sed ob hyperbolæ naturam rectang. QXN quadrati XM est etiam quadruplum (*c*): ergo erit BKq = CNq + rect. QXN = CXq (*d*); ideoque CX, vel DM ipsi BR erit æqualis. Præterea ob similitudinem triangulorum RBK, IBH est KB : KR :: IB : BH, idest erit DM : CN :: IB : BH (= MO). Ergo (*e*) rect. ex CN in IB = rect. DMoE, seu spatio hyperbolico DMmE. Eodem modo demonstratur singula ejusmodi spatia hyperbolica æquari singulis rectangulis ex parabolæ parametro CN in respondentem ejusdem curvæ particulam. Ergo erit totum spatium hyperbolicum CDMN æquale rectangulo ex parabolæ perimetro NB in ejusdem parametrum CN.

(a) *Per cor. 4. p. 4. cap. 2.*
(b) *Per 47. l. 1.*
(c) *Per cor. 2. p. 1. huj. cap.*
(d) *Per 6. l. 2.*
(e) *Per 16. l. 6.*

COROLLARIA.

I. HInc patet parabolæ longitudinem recta linea exhiberi non posse, nisi inventa spatii hyperbolici ei convenientis quadratura.

II. Si hyperbola NM fuerit æquilatera, parametrum scilicet æqualem lateri transverso QN habeat; eodemque parametro descripta sit parabola: erit quoque spatium hyperbolicum CDMN æquale rectangulo ex CN, seu ex semiparametro in parabolæ longitudinem NB. In hac enim hypothesi BPq (= BAq + APq) = rect. QXN + (*f*) CNq = (*g*) CXq = DMq; ideoque BP = DM. Cum vero sit BP : AP :: BI : BH, erit quoque DM : CN :: BI : BH (= Mo), ideoque rectangulum DMOE, seu spatium hyperbolicum

(f) *Per cor. 4. p. 4. cap. 1.*
(g) *Per 6. l. 2.*

bolicum DMmE æquale erit rectangulo CN*BI; totumque spatium hyperbolicum CDMN æquale rectangulo ex CN in parabolæ longitudinem NB.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 57. *SI ad axem AP referatur hyperbola AR cum suo asymptoto DI, sitque AD tangens verticalis asymptoto occurrens in D, ex quo sit DH axi parallela; tum circa eundem axem AP revolvatur quadrilineum APID ordinata quavis PI terminatum; erit conois hyperbolica, seu solidum in hac revolutione genitum ab hyperbola AR æquale annulo solido genito in eadem revolutione a triangulo DHI. Tum solidum genitum a spatio ARID æquale cylindro genito a rectangulo PADH.*

I. Pars. Cum quadratum PI [a] sit æquale PRq + rect. FIR, seu PRq + PHq [b], erit PIq − PHq = PRq; ideoque etiam circulus radii PI minus circulo radii PH, hoc est, armilla circularis genita a recta HI in ea revolutione, æqualis erit circulo radii PR. Simili modo ducta alia ordinata pi erit armilla genita ab hi æqualis circulo radii pr: idque cum semper accidat, liquet solidum ab hyperbola AR genitum circa axem AP æquari annulo solido ex revolutione trianguli HDI circa eundem axem AP.

(a) *Per 6. l.2.*
(b) *Per 10. huj. cap.*

II. Pars. Est præterea solidum genitum a quadrilineo APID æquale conoidi hyperbolicæ ex revolutione curvæ AR, & solido ex revolutione spatii ARID; tum etiam est æquale cylindro ex revolutione rectanguli APHD, & annulo ex revolutione trianguli DHI. Cum ergo conois hyperbolica ARP sit æqualis annulo ex revolutione trianguli DHI, erit etiam solidum ex rotatione spatii ARID æquale cylindro ex revolutione rectanguli APHD.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

I*Isdem positis revolvatur modo spatium hyperbolicum CARP circa axem conjugatum CP; eritque solidum in ea revolutione ortum a spatio CARI æquale cylindro genito in eadem revolutione a rectangulo CAEP; Itemque annulus solidus ex revolutione spatii RAE æqualis erit cono ex revolutione trianguli ICP.* Fig. 58.

I. Pars. Cum enim sit rect. GIR, seu RPq — PIq (*a*) = CAq [*b*] seu PEq, erit quoque circulus radii PR minus circulo radii PI, hoc est, armilla circularis orta ex revolutione RI circa axem CP æqualis circulo radii PE. Idque cum semper accidat, patet solidum a spatio CARI circa axem CP genitum æquari cylindro ex revolutione rectanguli CAEP circa eundem axem.

[a] *Per* 5. *l.* 2.
(b) *Per cor.* 2. *p.* 12.

II. Pars. Est vero cylindri ex rotatione rectanguli CE supplementum ad solidum ex revolutione totius spatii CARP annulus solidus a triangulo mixtilineo ARE; tum solidi ex revolutione spatii CARI supplementum ad idem solidum ex revolutione spatii CARP est conus a triangulo CIP genitus. Ergo ille annullus solidus huic cono æqualis erit.

PROPOSITIO XX.

S*I circa hyperbolam æquilateram PBC sint asymptoti QA, AG angulum rectum comprehendentes; ductæque præterea fuerint ex quovis ejus puncto C rectæ CD, CE asymptotis parallelæ: dico solidum hyperbolicum acutum infinite longum genitum ex revolutione infiniti spatii hyperbolici QDCP circa asymptotum QA æquari cylindro, qui fit ex revolutione rectanguli DCEA circa eandem asymptotum.* Fig. 59.

Ex quovis hyperbolæ puncto B supra ipsam DC

assumto ducantur rectæ BL, BR ipsis asymptotis etiam parallelæ. ducaturque diagonalis AC. Jam vero est BL ad CE, ut AE ad AL (*a*), seu ut peripheria circuli radii AE ad peripheriam circuli radii AL [*b*]; ideoque rectangulum ex CE in in peripheriam radii AE, seu superficies cylindrica orta ex revolutione rectanguli DE circa axem AD [*c*] erit æqualis rectangulo ex BL in peripheriam radii AL, seu superficiei cylindricæ [*d*] ex revolutione rectanguli ALBR circa axem AR. Ergo erit superficies cylindrica ex revolutione rectanguli DE ad superficiem cylindricam ex revolutione rectanguli DL, ut superficies cylindrica ex revolutione rectanguli RL ad eandem ex revolutione rectanguli DL. Est vero prior ratio eadem quæ AE ad AL [*e*], seu [*f*] EC ad LO, seu LI ad LO: ergo etiam superficies cylindrica ex revolutione rectanguli RL erit ad superficiem cylindricam ex revolutione rectanguli DL, ut IL ad LO. Id vero cum semper eveniat ubicumque fuerit punctum B, erunt omnes superficies cylindricæ componentes solidum hyperbolicum ex revolutione spatii QAECP ad omnes superficies cylindricas constituentes cylindrum ex revolutione rectanguli DE, ut omnes lineæ ejusdem rectanguli ad lineas illis respondentes in triangulo AEC. Ergo erit solidum hyperbolicum ex rotatione totius spatii QAECP ad cylindrum ex rotatione rectanguli DE, ut idem rectangulum ad triangulum AEC, seu in ratione dupla; ideoque dividendo erit solidum hyperbolicum infinite longum ex rotatione spatii QDCP æquale cylindro ex rotatione rectanguli DE.

[a] *Per cor. 3. p. 13. huj. cap.*
(b) *Per propos. 7. Theorem. Arch.*
[c] *Per cor. 1. pr. 11. Theorem. Arch.*
(d) *Per idem cor.*
[e] *Per cor. 2. p. 11. Theorem. Arch.*
[f] *Per 4. l. 6.*

SCHOLIUM.

Miram hanc planeque stupendam hyperbolæ proprietatem, quod vid. circa suam asymptotum revoluta solidum gignat infinitæ longitudinis, sed æqualem cylindro, seu solido secundum omnes suas dimensiones finito, omnium primus detexit Cel. Torricellius: at postea Geometris calculi integralis medio

dio infinitæ aliæ curvæ innotuere simili proprietate donatæ. Potissima admirationis ratio illius proprietatis in eo consistit, quod spatium ex cujus revolutione id solidum infinite longum producitur, absolute infinitum sit, & nihilominus solidum inde genitum finitæ sit & mensurabilis magnitudinis. Interim notetur innumeras alias detectas esse a Geometris curvas, quæ spatium cum suis asymptotis continent mensurabile, & spatio finito æquale: sed quæ nihilominus spatia si circa easdem asymptotos revolvantur, solida inde gignunt non tantum infinite longa, sed absolute infinitam & non mensurabilem magnitudinem continentia. De his sane etsi ob evidentissimam demonstrationem dubitandi nullus esse possit locus, incomprehensibilia tamen sunt, nec ἀγεωμετρήτοις persuaderi ullo modo poterunt. Hinc discant increduli non ideo religionis nostræ sacrosancta mysteria aspernari, & inter fabellas reputare, quod comprehendi & intelligi a nobis non valeant.

Ex hac eadem hyperbolæ proprietate solidæ finitæ magnitudinis infinita divisibilitas colligitur: in eo enim solido hyperbolico acuto ob infinitam longitudinem infinitas numero contineri partes nemo dubitabit; ideoque & in cylindro, qui ei solido æquatur, easdem etiam infinitas numero partes contineri necesse est.

CAPUT IV.

Præcipuæ Ellipsis Proprietates recensentur.

MONITUM.

M*Agna est proprietatum ellipsis & hyperbolæ affinitas, ac sæpenumero simili, vel eadem demonstratione utriusque curvæ similes proprietates fulciuntur. Hinc ne idem repetere videamur, demonstrationes capitis præcedentis sæpius hic appellabimus, præsertim cum sola earum applicatio ad ellipsium*

schemata propositionum ad ellipses spectantium demonstrationem faciat. Quamobrem in earum schematis eadem affixa sunt litteræ, quibus hyperbolarum figuræ notatæ sunt; ut vid. ita tyrones propositionum cap. præc. demonstrationes relegentes, ellipsium schematis facilius aptare eas valeant.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 8. *IN ellipsi GQMNG erunt ordinatarum GK, EP quadrata, ut rectangula QKN, QPN, quæ nempe diametri partibus inter easdem ordinatas, & utramque verticem continentur.*

Demonstratio eadem est ac propositionis primæ cap. præc.: hinc satis est, ut eam tirones nostri relegant, schema 8. inspicientes.

COROLLARIA.

SI fiat, ut rectangulum QKN ad GKq, ita latus transversum QN ad aliam rectam S; erit quodvis aliud simile rectangulum QPN ad quadratum respondentis ordinatæ EP, ut idem latus transversum QN ad eandem rectam S. Dicetur deinceps hæc recta S ellipsis *parameter* vel *latus rectum*. Hæc eadem si lateri transverso fuerit æqualis, erunt quoque quadrata ordinatarum PE, GK rectangulis QPN, QKN æqualia; & ellipsis vertetur in circulum, si insuper ordinatim applicatæ diametro fuerint perpendiculares.

PROPOSITIO II.

Fig. 60. *SI ex vertice N ellipsis VNMQ perpendiculariter ad latus transversum QN excitetur NA æqualis parametro ejusdem sectionis, atque ex Q per A recta ducatur QA, cui ex P & K ductæ ipsi NA parallelæ PB, KC, occurrant in B, & C: dico quadratum ordinatæ KM æquari rectan-*

gulo

gulo ex NK abscissa in parallelam parametro KC; & quadratum ordinatæ PI rectangulo ex abscissa NP in parallelam PB; & sic deinceps.

Applicetur hic demonstratio prop.2.cap.præc.

COROLLARIA.

I. QUadratum cujusque ordinatæ VK, vel KM æquatur rectangulo ex latere recto NA in abscissam NK, hoc est, rectangulo KA, sed demto rectangulo GH, quod fit ex eadem abscissa NK, vel GC, in quartam proportionalem post latus transversum QN, latus rectum NA, & abscissam NK, vel GC. Est enim idem quadratum VK æquale rectangulo KG, seu rectangulo KA minus rectang. HG: prius fit ex abscissa NK in parametrum NA; alterum vero ex eadem abscissa NK, vel GC in GA, seu [ob similitudinem triangulorum QNA, CGA] in quartam proportionalem post QN, NA, GC.

II. Rectangula KC, PD, quæ quadratis ordinatarum VK, EP æquantur, lateri recto sunt applicata, deficiuntque a rectangulis KA, PA ex respondentibus abscissis in parametrum, rectangulis HG, FD, quæ [a] similia sunt rectangulo NL, quod sub transverso QN, & recto latere NA continetur. Et hinc elucescit ratio nominis ellipsis, quod Apollonius huic sectioni imposuit; quia nempe quadratum semiordinatæ deficit a rectangulo ex latere recto in abscissam: unde ellipsis quasi *deficiens* dicta est.

[a] *Per 24.l.6.*

III. Si ex vertice N ad punctum C recta ducatur NC, erit VKq duplum trianguli KNC; similiter ducta NB, erit EPq trianguli NPB duplum.

SCHOLIUM.

Fig. 61. DAtis ellipsis latere transverso QN, & recto NA, facile in plano ea transferri poterit, infinita illius puncta inveniendo, simili fere modo, quo in Schol. post prop. 2. cap. præc., hyperbolam describi posse docuimus. Posito nempe latere recto NA perpendiculariter ad transversum NQ, jungatur AQ; tum ex punctis in AQ ad libitum sumtis, puta D, F, ducantur DM, FO ipsi AN parallelæ occurrentes NQ in B, & G. Ex BM abscindatur BC æqualis BN, & ex GO abscindatur GH ipsi GN æqualis. Super DC, & FH semicirculi describantur DKC, FIH ipsi NQ occurrentes in K, & I. Abscindatur tandem ex BM pars BE æqualis BK, & ex GO abscindatur GL ipsi GI æqualis. Dico puncta E, & L esse in ellipsi, cujus latus transversum QN, & rectum NA. Demonstratio ex hac prop. 2. facile deducitur, similisque ei est, quam in mox laudato scholio adduximus.

Fig. 62. Sed potest præterea ellipsis quodam regularum motu describi, datis vid. ejus latere transverso, & recto. Latus quidem transversum referat QN; NA vero eidem occurrens in N cum ellipsis parametrum, tum ordinatarum positionem exhibeat. Per terminum parametri A recta AH ducatur ipsi NQ parallela. Tum circa terminos lateris transversi Q, & N duæ regulæ QZ, NX revolvi intelligantur hac lege, ut quæ per eas abscinduntur NL, AV ex rectis NA, AH, sint perpetuo æquales. Dico curvam continuis regularum QZ, NX intersectionibus M descriptam esse ellipsim. Ducta enim ordinata MK demonstrabitur ut in scholio post prop. 2. cap. præc. esse ejus quadratum ad rectangulum QKN, ut latus rectum NA ad latus transversum NQ, quæ est ellipsis nota proprietas.

PRO-

PROPOSITIO III.

Isdem positis, quæ in præced. prop. si latus transversum QN, & latus rectum NA bifariam secentur in C, & E, ducaturque per ea sectionum puncta recta CE, cui occurrat in D ordinata GK; erit ejusdem ordinatæ quadratum duplum quadrilinei ENKD; & similiter cujusvis alterius ordinatæ LP quadratum duplum erit quadrilinei TLNE sibi respondentis. Fig. 63.

Applicetur ad hoc schema demonstratio prop. 3. cap. præc.

Punctum C quod latus transversum bifariam dividit, ellipsis *centrum* appellatur. Recta QA transversi, & recti lateris terminos Q & A jungens *Directrix*; CE vero per bisectionum puncta C, & E transiens *Subdirectrix* poterit appellari.

PROPOSITIO IV.

Ad datum in ellipsis perimetro punctum tangentem ducere. Fig. 64.

Eadem utendum hic est methodo, qua prop. 4. cap. præc. hyperbolæ tangentem inveniri docuimus. Si itaque datum punctum fuerit in sectionis vertice; quæ ex eo ducitur ordinatis parallela, erit quæsita tangens. Quod si illud punctum alibi fuerit, puta in M, ex eo ducatur ad axem ordinata MP, quæ producatur usque ad subdirectricem CR in C; tum fiat ut GP ad PM, ita PM ad tertiam proportionalem, quæ transferatur in axe ex P in T; tum ex M ad T jungatur recta MT: dico hanc esse tangentem ad datum ellipsis punctum M. Demonstratio eadem est ac prop. 4. cap. præc.; ideoque satis est eam relegere schema 64 inspiciendo.

CO-

COROLLARIA.

I. SI in axe ex P sumatur PV æqualis PG, tum jungatur VM; erit hæc tangenti TM normalis.

II. Juncta directrice QON, cui occurrat in O ordinata MP; ob æqualitatem rectangulorum GPT, OPA, erit PG: PO:: PA: PT; & convertendo PG: GO:: PA: AT.

III. Cum sit GO æqualis RN, seu RA, erit etiam PG : RA :: PA : AT. Sed PG : RA :: CP: CA (*a*); ergo ex æquali PA : AT :: CP : CA; & alternando AT : CA :: PA : CP; & componendo CT : CA :: CA CP; ideoque CAq = rect. CP × CT.

(a) *Per* 4.*l*.6.

IV. Si ab æqualibus CAq, & rect. CP × CT auferatur idem quadratum CP, reliqua erunt etiam æqualia, nempe rect. QPA (*b*), & rect. TPC (*c*).

(b) *Per* 5.*l*.2.

(c) *Per* 3.*l*.1.

V. Ratio PT ad TA componetur ex ratione dupla, & ratione QP ad QA.

VI. Ducta tangente verticali AZ, cui occurrat in Z recta, quæ ex vertice Q per punctum M ducitur; erit AZ a tangente TXM bifariam in X secta.

VII. Hinc si per alterum verticem A, & punctum M recta ducatur ipsi QB productæ alicubi occurrens, ejusdem pars inter Q, & ipsam AM productam intercepta bifariam in B ab eadem tangente secta erit.

VIII. rectangulum ex QB in AX erit æquale quadranti rectanguli ex transverso latere QA in rectum NA.

Horum omnium demonstrationem habes in coroll. prop. 4. cap. præc.

SCHO-

SCHOLIUM.

CUm sit (a) CP : CA :: CA : CT, patet quo minor est CP, seu quo proximior sit centro C ordinata PM, eo majorem fieri ipsam CT; ita ut diminuta in infinitum CP, seu accedente puncto P ad centrum C, & ordinata PM accedente ad ordinatam, quæ ex centro ducitur CS, infinita tum evadat ipsa CT, & tangens MT eidem CT parallela. Est vero $CT = \frac{CAq}{CP}$; ideoque evanescente CP, & facta o, fiet $CT = \frac{CAq}{o}$. Hinc duo colliges. I. Ejusmodi expressionem, in qua quantitas finita per o dividitur ad quantitatem infinitam designandam usurpari posse. II. o, seu nihilum esse ad finitam quantitatem, ut hæc eadem ad infinitam. Cave autem ne pro o, nihilum ipsum absolutum accipias, quod nec magnitudinibus comparari, nec cum iis ullam rationem habere potest; sed intellige tantum nihilum respectivum, seu quantitatem infinite exiguam, quæ relate ad magnitudinem finitam est veluti nihilum.

[a] *Per cor. 3. huj. prop.*

Præterea circa angulum contactus CAH, a tangente vid. AC, & curva elliptica AH factum observandum hic est eum nulla recta posse secari, ac esse quocumque acuto adsignabili minorem. Describatur enim semicirculus AKG ex eodem vertice A diametrum habens AG parametro ellipsis AC æqualem; sitque AE abscissa infinite exigua, cui respondeat ordinata EF circulo & ellipsi occurrens. Jam vero ob ellipsis naturam est rect. AEV : EFq :: AV : AC (b), seu (ob AC = AG) :: AV : AG, seu etiam :: EV : EG [quod vid. AE infinite parva, a lineis AV, AG ablata easdem non minuat]. Est autem EV : EG :: rect. AEV : rect. AEG (c); igitur ex æquali erit etiam rect. AEV

Fig. 20.

(b) *Per cor. 1. p. 1. huj. cap.*

(c) *Per 1. l. 6.*

AEV : EFq :: rectang. AEV : rect. AEG ; ideoque rect. AEG = EFq : Ordinata ergo EF cum ad ellipsis, tum ad circuli perimetrum pertinet, estque punctum F utrique curvæ commune. Similiter omnes ordinatæ usque ad verticem A ad utramque curvam pertinebunt, communisque erit arcus AF, & idem in utraque curva angulus contactus CAF.

PROPOSITIO V.

Fig. 65. *IN ellipsi quævis recta MC ex puncto M per centrum C ducta, si ulterius ad alteram partem producatur usque ad N, bifariam in centro C dividetur. Tum quæ ex ejus terminis M, N ducuntur ad diametrum usque tangentes, parallelæ sunt & æquales.*

Demonstratio eadem est ac prop. 5. cap. præc.

COROLLARIA.

I. PRoducta NF, donec ellipsi ex altera ejus parte occurrat in G, patet GF, NF æquari; ideoque æquales & parallelas etiam esse GF, MP. Juncta igitur GM, (*a*) erunt duæ GM, FP parallelæ & æquales, eritque GP parallelogrammum; tum ducta ex centro C ordinatis MP, GF parallela BCD, parallelogrammum GP in duo æqualia parallelogramma GC, EP dividetur, ipsaque GM bifariam in E secabitur. Similiter omnes aliæ huic GM, vel diametro QA parallelæ, jungentes terminos æqualium ordinatarum, uti OI, bifariam dividentur per eandem BCD.

(a) Per 33. l. 1.

II. Erit igitur & ipsa BCD altera diameter eas habens ordinatas, quæ ad diametrum QA parallelæ intra ellipsim ducuntur, veluti GM, OI: unde *conjugata* diameter ea dicta est, quod videlicet priori QA veluti juncta & conjugata est. Cum perimetro ellipsis in B, & D sit ea terminata,

nata, media est proportionalis inter latus rectum AV, & transversum QA. Est enim rect. QCA, (a) seu CAq: CBq :: QA : AV. Sed CAq : CBq :: QAq : BDq; ergo ex æquali QAq : BDq :: QA : AV; seu (sumta QA pro communi altitudine) :: QAq : rect. QA × AV. Ergo æqualibus antecedentibus æqualia etiam erunt consequentia, quadratum sc. BD, & rectangulum QA × AV; ideoque (b) BD media proportionalis erit inter QA, & AV.

(a) *Per cor. pr. 1. huj. e.*

(b) *Per 17. l. 6.*

III. Si fiat ut hæc diameter conjugata BD ad principalem QA, ita hæc eadem QA ad tertiam proportionalem BL, dicetur hæc parameter, seu latus rectum ad eandem diametrum conjugatam. Nam quemadmodum quadratum conjugatæ BD æquatur rectangulo ex diametro principali QA in suam parametrum, ita vicissim quadratum ejusdem QA æquabitur rectangulo ex conjugata BD in BL.

IV. In ellipsi quadrata ordinatarum GE, OS ad diametrum conjugatam BD sunt ut rectangula BED, BSD, partium scilicet ejusdem diametri. Cum enim sit (c) QCq ad CBq, ut rect. QFA ad GFq, seu ECq, erit (d) QCq : CBq :: QCq — rect. QFA : CBq — ECq. Sed (e) QCq — rect. QFA = CFq = EGq, & CBq — ECq (f) = rect. BED; ergo erit QCq : CBq :: EGq : rect. BED. Similiter ordinata OS demonstrabitur CQq : CBq :: OSq : rect. BSD. Ergo ex æquali EGq : rect. BED :: OSq : rect. BSD; & permutando EGq : OSq :: rect. BED : rect. BSD.

(c) *Per 1. huj. e.*

[d] *Per 15. l. 5.*

[e] *Per 5. l. 2.*

[f] *Per eandem.*

V. Cum sint BD, AQ, BL continue proportionales, erit (g) BDq : AQq :: BD : BL; ideoque erit etiam BCq : CQq :: BD : BL; & invertendo CQq : BCq :: BL : BD. Sed est EGq : rect. BED :: CQq : BCq; ergo ex æquali erit EGq : rect. BED :: BL : BD, hoc est, ut latus rectum BL ad suam diametrum conjugatam BD.

[g] *Per 20. l. 6.*

LEM-

LEMMA AD PROP. VI.

Fig. 66. *SI in ellipsi AM contingens recta MT cum diametro conveniat in T, & a contactu M ad eandem diametrum ordinatim applicetur MP, cui per sectionis verticem A sit parallela AD, quæ cum recta MCS ex contactu M per centrum C ducta conveniat in D: & sumto in sectione puncto aliquo F ab eo ordinatim ad diametrum AQ applicetur FV, tum recta ducatur FH tangenti MT parallela curvæ occurrens in K, & diametro AQ in H; cui ex K etiam ordinetur KI cum ipsa CM conveniens in R: dico triangulum MTP quadrilineo MDAP æquari; tum triangulum FHV quadrilineo BDAV, & triangulum KHI quadrilineo RDAI.*

Demonstratio eadem est ac lemmatis ad pr. 7. cap. præc., nisi quod ubi in Fig. 38. illius propositionis a triangulo MCP subtrahi oportuit æqualia triangula DCA, MCT, ut ita remaneret triangulum MTP quadrilineo MDAP æquale; hic vero a triangulis æqualibus DCA, TMC subtrahi debet idem triangulum MCP, ut ita remaneat triangulum MTP quadrilineo MDAP æquale.

COROLLARIA:

CUm triangulum KHI quadrilineo RDAI sit æquale, si utrumque addatur eidem triangulo RCI, fiet quadrilineum RCHK triangulo DCA æquale. Sed eidem triangulo DCA æquatur triangulum CMT; ergo triangulum CMT, & quadrilineum RCHK erunt æqualia.

PROPOSITIO VI.

Fig. 66. *SI ellipsim AE tangens recta MT cum diametro concurrat in T, & per contactum M, & centrum C ducatur recta MCS ad alteram usque sectionis*

nis

nis partem, hæc bifariam secabit omnes lineas ad sectionem terminatas, quæ tangenti MT ducuntur parallelæ, veluti FK, EA: eruntque ordinatarum ZA, LK quadrata ut rectangula SZM, SLM, quæ vid. ejusdem diametri partibus inter ipsas applicatas, & utrumque ejus terminum continentur.

Eadem est demonstratio ac propos. 7. cap. præc.; nisi quod ubi in secunda ejus parte ad demonstrandam æqualitatem inter quadrilineum MZAT, & triangulum DZA, æqualia triangula CDA, CMT auferebantur a triangulo ZCA; hic e contra ab iis æqualibus auferri debet idem triangulum ZCA. Et ubi ad demonstrandam æqualitatem inter quadrilineum MLHT, & triangulum RLK, quadrilineum CRKH, & ei æquale triangulum CMT auferebantur ab eodem triangulo CLH; hic vice versa ab iis æqualibus idem triangulum CLH auferendum est.

COROLLARIA.

I. ERit itaque MCS altera diameter bifariam secans, quæ ipsi applicantur, quemadmodum diameter principalis QA bifariam suas ordinatas secat; eademque est coordinatarum ad hanc diametrum pertinentium relatio, ac quæ inter coordinatas diametri principalis QA intercedit.

II. Hinc quæcunque respectu diametri principalis QA superius sunt demonstrata, cuique alteri diametro poterunt applicari. Sic e. g. quemadmodum tangens MT occurrens diametro principali QA ita eam dividit, ut sint CP, CA, CT continue proportionales, & CAq sit æquale rectangulo PCT; ita quoque tangens AD diametro MCS occurrens in D, ita eam dividet, ut CZ, CM, CD continue sint proportionales, sitque rectangulum ZCD æquale quadrato CM. Et quemadmodum ducta ex termino diametri principalis Q ad punctum M recta QMZ, quæ inde intercipi- *Fig. 64.*

tur

Fig. 66. tur tangens verticalis AZ bifariam in X secatur; ita quoque juncta AS, intercepta tangentis pars MX bifariam in O dividetur.

III. Eodem modo invenietur parameter ad diametrum MS quo ad principalem alteram QA inventa est, determinando scilicet tertiam proportionalem post rect. SZM, ZAq, & diametrum ipsam MS. Inventa vero parametro determinabitur ad eandem SM diameter conjugata ms, inveniendo mediam proportionalem inter ipsam SM, & suam parametrum, eaque ex centro C collocabitur ordinatis FK, EA parallela, & in eodem centro C bisecta. Ita vero ea constituta, patet, ejusdem terminos s, m, in ellipsis perimetro reperiri; cum enim sit sC una ex ordinatis ad diametrum MS, patet esse rect. SCM, vel SCq ad sCq, vel quadruplicatis terminis, MSq ad smq, ut SM ad suam parametrum, vel sumta SM pro communi altitudine, ut SMq ad rect. ex eadem SM in suam parametrum; ideoque erit smq huic rectangulo æquale, & sm media proportionalis inter diametrum MS, & suam parametrum.

PROPOSITIO VII.

Fig. 67. *IN ellipsi parallelogrammum FHOB, quod fit ex tangentibus a terminis diametrorum conjugatarum SM, DH, æquale est rectangulo GPRE, quod fit ex tangentibus a terminis axium conjugatorum.*

Jungatur SA, atque ex S ordinetur ad axem IK recta SL, & ex A ad diametrum DH sit ordinata AM. Cum sit [a] CZ ad CH, ut CH ad CM, erit etiam parallelogrammum CZTX ad parallelogrammum CSOH, ut hoc idem parallelogrammum ad aliud CSNM; hæc enim parallelogramma [b] eandem linearum CZ, CH, CM rationem habent. Similiter ob CX, CI, CL continue proportionales, est quoque parallelogrammum CZTX ad parallelogrammum CIPA, ut hoc

[a] *Per cor. 3. p. 4. vel cor. 2. præc.*
[b] *Per 1. 6.*

hoc idem ad aliud LVAC. Est vero in duplici hac parallelogrammorum proportionalium serie idem primus terminus, nempe parallelogrammum CZTX; postremi quoque termini æquales sunt, scil. parallelogrammum CSNM, & rect. LVAC, cum utrumque ejusdem trianguli [*a*] CSA duplum sit. Ergo medii quoque termini, scil. parallelogrammum CSOH, & rectangulum IPAC erunt æqualia. Sed parallelogrammum FHOB quadruplum est parallelogrammi CSOH, & rectangulum GPRE quadruplum rectanguli IPAC; ergo ea erunt quoque æqualia. Q. E. D. Et hinc etiam patet junctis terminis axium AQ, IK, & diametrorum SM, DH, inde orta parallelogramma æqualia esse.

[a] *Per* 41.*l*.1.

Hanc eandem proprietatem prop. 14. cap. præc. in hyperbolis conjugatis locum habere demonstravimus, sed ab asymptoticis proprietatibus mutuata demonstratione. Verum quæ hic adducta est, in iisdem quoque hyperbolis obtinet.

LEMMA AD PROP. VIII.

SI in axe ellipsis QA sumantur duo puncta V, & F, ita ut rect. QVxVA, vel AFxFQ sit æquale quartæ parti illius rectanguli, quod fit ex transverso latere QA in latus rectum, junctæque fuerint ex V, & F ad puncta X, & B, in quibus tangens lateralis BMX verticales tangentes secat, recta VB, VX; FB, FX. **Fig. 68.**

1. *Erunt anguli BVX, BFX recti.*

2. *Æquales erunt anguli XBF, XVF, tum æquales BFV, BXV.*

3. *Concurrentibus BF, VX in H, quæ ex H ad punctum contactus M ducitur recta HM, tangenti MB erit perpendicularis.*

Demonstr. I. Pars. Ut in lemmate prop. 8. cap. præc., ita etiam hic demonstratur duo triangula BQV, VAX esse similia, & angulos VBQ, AVX

esse æquales. His vero addito eodem angulo BVQ, erunt duo VBQ, BVQ pares duobus AVX, BVQ. Sed duo priores rectum unum efficiunt; ergo uni quoque recto duo reliqui AVX, BVQ æquales erunt; ideoque [a] rectus etiam erit angulus BVX. Eodem modo demonstratur rectum esse angulum BFX.

[a] *Per cor. 1. pr. 13. l. 1.*

II. & III. Pars eodem modo demonstrantur, quo eædem partes mox laudati lemmatis, nisi quod in tertia parte postquam demonstratum est, ut illic, esse IB ad IX, ut QK ad KA, ita ulterius sit progrediendum. Componendo erit BX ad XI, ut QA ad AK, seu [ob KM, AX parallelas] ut BX ad XM; igitur duæ rectæ XI, MX erunt æquales; ideoque punctum I cadet in M.

PROPOSITIO VIII.

Fig. ead.

Iisdem positis quæ in præcedenti lemmate, inclinatisque ex punctis V, F ad punctum contactus M rectis VM, FM, dico angulos BMV, XMF, qui nempe fiunt ab iisdem inclinatis, & tangente MB esse æquales.

Demonstratio est eadem ac propositionis 8. cap. præc.

COROLLARIA.

I. Si candelæ lumen in punctum V collocetur, ex quo ad concavam ellipsis AM superficiem radii incidant, ita iidem ab ea reflectentur, ut in punctum F omnes uniantur. Nam cum juxta Catoptricæ leges angulus incidentiæ angulo reflexionis esse debeat æqualis, si radius incidens fuerit VM, ita is reflecti debet, ut qui inde fit angulus a radio reflexo, & tangente BMX, æqualis sit angulo incidentiæ VMB: id vero non aliter obtinetur, nisi radius reflexus transeat per F.

Vi-

Vicissim si in F collocetur candelæ fax, radii a concava ellipsis superficie reflexi unientur in V. Hinc intelligitur cur ejusmodi puncta V, & F, ellipsis *Foci* dicti sint, quod vid. ex eorum alterutro radii in concavam curvæ superficiem incidentes, in alterum reflectantur: eademque puncta V, & F ellipsis *Umbilici* etiam dicuntur.

II. Si radius GM in convexam ellipsis superficiem ita incidat, ut productus transiret per focum V; reflexus erit MS, qui vid. intra curvam productus transiret per alterum focum F: ita enim fient incidentiæ, & reflexionis anguli GMX, SMB æquales, utpote ad verticem existentes æqualium angulorum BMV, FMX.

III. Focos V, & F ita facile determinabis. Ducatur semiaxis conjugatus CN; tum ex puncto N ad utramque axis transversi QA partem applicentur NF, NV, semiaxi transverso CA æquales, & erunt V, & F ellipsis foci. Cum enim NF sit æqualis CA, erit CAq = NCq + CFq. Sed [a] idem CAq = CFq + rect. QFA; ergo erit NCq + CFq = CFq + rect. QFA; & ablato communi CFq, erit NCq, seu quarta pars rectanguli ex axe transverso in latus rectum, æquale rectangulo QFA.

[a] *Per* 5. *l.* 2.

IV. Hinc etiam elegans ducendi tangentem ad quodvis ellipsis punctum M ratio deducitur. Inclinatis vid. ex focis F, & V ad idem punctum M rectis FM, VM, eorum alterutra, puta VM producatur in G; tum angulus FMG bifariam secetur per rectam MX; & hæc erit tangens.

PROPOSITIO IX.

SI ex quolibet ellipsis puncto M ad focos V, & F rectæ inclinentur MV, MF, erit earum summa æqualis axi transverso QA. Fig. 69.

Demonstratio eadem est ac prop. 9. cap. præc., nisi quod postquam, ut illic, demonstratum est

angulos QTV, ATX æquari, ita prosequenda est demonstratio. Utrisque addito communi angulo VTA, erunt duo anguli QTV, VTA, seu unicus QTA æqualis duobus ATX, VTA, seu uni VTX. Ergo cum hic sit rectus, rectus etiam erit angulus QTA: ideoque si super QA ut diametro, centro C, circulus describatur, hic transibit per T, eruntque tres rectæ CT, CQ, CA, utpote ejus circuli radii, æquales. Cum vero rectæ MP, VM, VF bisectæ sint in T, N, C, erit VP, seu VM dupla ipsius NT, & FM dupla CN. Ergo earundem summa, seu VM + MF erit dupla totius CT; ideoque æqualis axi transverso QA.

COROLLARIA.

Fig. 70. I. Hinc facile ellipsim continuo motu ita describes datis ejus axe transverso BA, & distantia focorum F, V. Nimirum in focis F, V clavi, aut paxilli figantur, quibus alligetur filum FMV axi majori BA æquale. Tum immissus stylus intra filum æquali semper vi tensum circumducatur; hic describet motu suo ellipsim; quod vid. summa inclinatarum ex focis ad quodvis ejus curvæ sic descriptæ punctum, perpetuo maneat eadem, & axi majori æqualis.

II. Datis quoque axe transverso BA, & distantia focorum FV, facile poterunt infinita determinari puncta, per quæ transeat ellipsis. Dividatur scilicet axis BA utcunque in P; atque centro F intervallo segmentorum axis alterutro, puta BP, describatur arcus; tum centro V intervallo segmentorum reliquo PA describatur alter arcus priorem, secans in M. Patet punctum M ad ellipsis perimetrum pertinere; eademque ratione innumera alia curvæ puncta posse inveniri.

Fig. 69. III. Si ex puncto contactus M ducatur tangenti MT perpendicularis ME axi occurrens in E; & ex foco

foco F eidem ME parallela sit FI tangenti MT occurrens in K, & inclinatæ ex foco VM productæ in I: erit axis transversus QA æqualis ei, quæ ex eadem inclinata abscinditur recta VI. Ob parallelas enim FI, EM anguli ad K recti sunt; æquales item anguli [*a*] FMK, IMK; latus MK commune: ergo [*b*] erunt etiam latera FM, MI æqualia. Itaque inclinatarum VM, FM summa æqualis erit ipsi VI; eritque propterea ipsa VI axi transverso QA æqualis. [a] *Per præc.* [b] *Per 26.l.1.*

IV. Est vero [*c*] VI : VF :: MV : VE; ideoque axis transversus ad distantiam focorum erit ut inclinatarum altera MV ad axis partem foco V, & normali ME comprehensam. [c] *Per 4.l.6.*

V. Si ex centro C recta ducatur SP tangenti RMK parallela, inclinatarum ex focis alteram MF secans in T: dico ejus partem MT semiaxi CA æquari. Ducta enim ex V recta VH eidem tangenti parallela, & inclinatæ FM occurrens in H, erunt anguli MHV, MVH æquales [*d*]; ideoque [*e*] HM = MV. Est etiam FH bisecta in T ob [*f*] FC : CV : FT : TH. Ergo TM est semisumma rectarum FM, MV. *Fig. 71.* [d] *Per 27.l.1. & præc.* [e] *Per 5.l.1.* (f) *Per 4.l.6.*

SCHOLIUM.

Quædam hic etiam colligemus ad ellipsis focos spectantia in provectiorum tironum gratiam, quæ adductis in schol. prop. 9. cap. præc. similia sunt, quorum proinde demonstrationes sæpius hic appellabimus.

I. Si ex ellipsis foco F ordinetur FM, erit hæc ut in hyperbola & parabola, semiparametro æqualis. Vid. num. 1. schol. mox laudati. *Fig. 72.*

II. Ductis ex M, & A tangentibus MT, AI sibi invicem in I occurrentibus; erit hic etiam ut in parabola, & hyperbola tangentis verticalis pars AI æqualis AF, seu distantiæ foci a vertice A. Vid. num. 2. ejusdem schol.

III. Hinc in triangulo TMF latus TF latere FM majus erit. Nam cum sit (a) AF : FB : AT : BT; erit alternando AF, seu AI : AT :: FB : BT. Ergo quemadmodum BT majus est FB, ita AT majus erit AI; ideoque FT majus quoque FM.

(a) *Per cor.7.p.4. huj.cap.*

IV. Iisdem ut supra manentibus, ordinataque ad tangentem usque HD curvæ occurrente in E, hæc æqualis erit FE, quæ scil. ex foco F ad idem curvæ punctum E ducitur. Vid. num. 4. ejusd. scholii.

V. Si itaque triangulum rectangulum TFM construatur, cujus latus FM minus sit latere FT, productisque lateribus TF, TM indefinite versus H, & D interjiciantur plures rectæ ipsi FM parallelæ, ut HD, hd; & ex F ad ipsas transferantur FE, fe ipsismet HD, hd æquales; puncta E, e erunt in ellipsi.

Fig. 73. VI. Si ad ductam ex puncto ellipsis R tangentem RG perpendicularis sit RP axi occurrens in P; & ex P inclinatæ ex foco FR perpendicularis sit PE; hæc abscindet, ut in parabola, & hyperbola, partem RE semiparametro æqualem. Vide demonstr. num. 6. laudati schol.; in eo tantum hic variat, quod rectangulorum VR×RE, & FRE, rectangulorum item VH×PR, FZ×PR summa non differentia hic spectanda sit. Summa enim rectarum VH, FZ non earundem differentia est hic dupla rectæ MC.

VII. Iisdem positis erunt GF, GP, GV harmonice proportionales, hoc est, erit GF : GV :: FP : PV. Vid. num. 7. laud. schol.

Fig. 74. VIII. Si ex duobus punctis in ellipsi R, H ad utrumque focum F, V rectæ inclinentur RF, HF; RV, HV; erit differentia angulorum RFH, RVH, qui ab iisdem inclinatis fiunt, dupla anguli RNH, qui fit a tangentibus eorundem punctorum RN, HN. In triangulo enim VRG duo anguli RVG, RGV æquantur (b) externo KRV, seu (c) GRF; & addito communiter angulo RGV, erunt anguli RVG, & bis

(b) *Per 32. l. 1.*

(c) *Per 3. huj. c.*

bis RGV æquales angulis GRF, RGV, seu æquales uni (*a*) RFV. Eodem modo demonstratur angulum FVH, & bis FTH æquari angulo HFV. Ergo integer angulus RVH cum bis RGV, seu bis TGN, & bis FTH, seu bis GTN æqualis erit angulo RFH. Sed angulus TGN bis, & GTN bis æquantur (*b*) angulo RNH bis; ergo angulus RVH cum angulo RNH bis æqualis erit angulo RFH. Ablato itaque communiter angulo RVH, erit angulus RNH bis æqualis angulo RFH minus angulo RVH.

(a) *Per* 32. *l.* 1.

(b) *Per* 32. *l.* 1.

IX. Hinc si ex terminis unius rectæ EH ad ellipsim terminatæ, & per focum F transeuntis ducantur tangentes EL, HL invicem in L occurrentes, fiet angulus ELH acutus. Hic enim æqualis esse debet semidifferentiæ duorum rectorum, & anguli EVH, quæ recto minor est.

X. Distantia focorum FV est media proportionalis inter axem transversum QA, & differentiam ejusdem axis transversi QA, & parametri; seu posita AG æquali parametro, erit QA ad VF, ut VF ad QG. Cum enim sit rectangulum QFA quadranti rectanguli QAG æquale, si utrumque auferatur a CAq, reliqua erunt æqualia, scil. CFq, & CAq $-\frac{1}{4}$ QAG; & quadruplicando terminos erit VFG = QAq $-$ rect. QAG = (*c*) rect. AQG. Erit itaque (*d*) AQ : VF :: VF : QG. Quod erat propositum. Est vero quadratum axis conjugati 2CE æquale rectangulo QAG; ideoque erit VFq ad quadratum axis conjugati 2CE, ut rect. AQG ad rect. QAG, seu (*e*) ut QG ad GA.

Fig. 75.

(c) *Per* 2. *l.* 2.

(d) *Per* 17. *l.* 6.

(e) *Per* 1. *l.* 6.

XI. Inclinatarum ex focis FM, VM ad quodvis ellipsis punctum M, rectangulum VMF æquatur quadrato semidiametri CH, quæ conjugata est semidiametro MC per punctum M transeunti. Demonstratio eadem est ac quæ num. 11. laudati schol. Animadverti tantum debet, quod duo anguli FKM, MVG non ideo hic sunt æquales, quod eidem arcui insistant, ut in Fig. 47.; sed quod tam FKM

Fig. 76.

(a) *Per* (*a*), quam MVG (*b*) cum eodem FVM duos re-
22. *l*. 3. ctos efficiat.

(b) *Per* 13. *l*. 1. XII. Iisdem positis erit summa rectanguli VRF, inclinatarum scil. ex focis ad quodvis ellipsis pun-
Fig. 75. ctum R, & quadrati semidiametri CR, quæ vid. ad idem punctum R spectat, æqualis differentiæ dimidii quadrati axis transversi QA, seu dupli quadrati CA, & quadrati CF, dimidiæ scilicet distantiæ focorum. Hoc est, erit rect. VRF + CRq = 2CAq — CFq. Cum enim sit in ellipsi VR + RF
(c) *Per* 4. *l*. 2. = QA, erit (*c*) VFq + REq + rect. 2VRF = QAq. Sed ob VF bifariam in C sectam (*d*) est VRq +
(d) *Per* 12. & 13. *l*. 2. FRq = 2FCq + 2CRq: ergo erit 2CFq + 2CRq + rect. 2VRF = OAq; & omnia bisecando erit CFq + CRq + rect. VRF = 2CAq; & auferendo utrinque CFq, erit CRq + rect. VRF = 2CAq — CFq. Quod erat propositum. Patet ergo quantitatem CRq + rect. VRF constantem esse.

(e) *N*. 11. *huj*. *schol*. XIII. Est vero rect. VRF = CHq (*e*); itaque erit CRq + CHq = 2CAq — 2CFq. Præterea est
(f) *Per* 5. *l*. 2. CAq = (*f*) CFq + rect. QFA = CFq + CEq (*g*): ergo etiam CRq + CHq = CFq + CEq + CAq —
(g) *Per* *cor*. 2. *p*. 5. *huj*. *cap*. CFq = CEq + CAq; & quadruplicando terminos, erit summa quadratorum duarum quarumvis diametrorum invicem conjugatarum æqualis summæ quadratorum axium.

SCHOLIUM II.

Quemadmodum juxta hyperbolicam figuram tornatæ lentes aptissimæ sunt colligendis ad datum punctum lucis radiis ex vitro in aerem transeuntibus; ita si elliptica figura eædem lentes donentur, lucis radios ex aere in vitrum transeuntes
Fig. 69. *ad datum punctum colligere valent. Sit enim LM lucis radius in convexam vitri superficiem ex aere incidens axi AQ parallelus, qui deinde post refractionem tendat ad V per rectam MV. Tum ducatur MR ad idem curvæ punctum M perpendicularis, ita*

ita ut fiat angulus incidentiæ LMR, refractionis vero angulus sit VME. Angulus incidentiæ LMR ob parallelas ML, EA, æqualis est angulo (a) MEA, qui efficiens cum angulo MEV duorum rectorum summam, eundem cum illo sinum habebit. Est vero in triangulo MEV angulo refracto VME oppositum latus EV, & angulo MEV oppositum MV, seu radius refractus. Cum ergo sinus angulorum cujuscumque trianguli sint ut ejusdem latera opposita, erit sinus anguli incidentiæ MEA, vel MEV ad sinum anguli refracti VME; ut latus MV ad latus VE, seu ut radius refractus MV ad distantiam VE, puncti scil. V, ubi radii colligi debent, & puncti E, ubi perpendicularis axi occurrit. Posito ergo, quod radius LM ab aere transeat ad vitrum, & post refrationem tendat ad V, esse debet MV ad VE, ut 3 ad 2; hæc enim est constanter observata ratio in ejusmodi transitu inter sinus angulorum incidentiæ, & refractionis.

(a) Per 27. *l.* 1.

Eo ergo deducta res est, ut talis naturæ curva inveniatur, ex cujus puncto M ubivis in ejus perimetro assumto, ducta ad axem usque normali ME, & MV ad datum in eodem axe punctum V, rectarum VM, VE constans sit ratio, eaque quæ 3 ad 2. Hanc vero curvam esse ellipsim ex cor. 4. prop. 9. facile liquet; ibi enim ostensum est esse inclinatarum ex focis unam MV ad axis partem VE foco V, & normali ME comprehensam, ut axis transversus ad distantiam focorum, quæ sane constans ratio est.

Id itaque reliquum est, ut ex infinitis ellipsibus ea inveniatur, in qua ratio axis transversi ad distantiam focorum eadem sit quæ 3 ad 2. Est vero distantia focorum media proportionalis inter axem transversum, & differentiam lateris transversi, & recti (b): si itaque datis numeris 3, 2 inveniatur tertius proportionalis $\frac{4}{3}$, assumto 3 pro axe transverso, erit $\frac{4}{3}$ differentia lateris transversi & recti;

(b) *N.* 10. *sch. præc.*

ideoque

ideoque erit latus rectum $\frac{5}{3}$. *Describatur ergo ellipsis, in qua axis transversus ad suam parametrum eam servet rationem quæ* 3 *ad* $\frac{5}{3}$; *juxta ejus curvaturam tornatæ lentes quæsitum effectum obtinebunt.*

Notandum tamen hic est, quod ut lucis radii post refractionem in M ad punctum V tendant, necesse est ut non aliam refractionem in egressu a vitro sortiantur, alias enim radiorum directio ad V per priorem refractionem acquisita per hanc alteram mutaretur. Ad hanc vero tollendam secundam refractionem necesse est ex altera lentis parte sphæricam concavam figuram inducere, cujus centrum sit idem V; ita enim radii utpote ad V vergentes perpendiculariter ad eam superficiem incident, nullamque proinde refractionem subibunt, rectaque ad V progredientur.

PROPOSITIO X.

Fig. 63. *SI eodem axe transverso QN describatur ellipsis NGQ, cujus latus rectum NE, & ellipsis NBQ, cujus latus rectum NA, sitque RK media proportionalis inter NE, & NA: erit ellipsis NGQ ad ellipsim NBQ, ut NE ad RK.*

Demonstratio eadem est ac prop. 15. cap. præc.

COROLLARIA.

I. QUod si ellipsis NHQ fuerit circulus, tum erit latus rectum NA æquale transverso QN, & media proportionalis RK inter NA, NE, erit etiam media inter NQ, NE, adeo-

adeoque & æqualis (*a*) axi conjugato ellipsis QMN. (a) *Per*
Igitur cum sit per prop. ellipsis QMN ad circulum *cor.2.p.5.*
QHN, ut NE ad RK, seu ut RK ad NA, vel *huj.cap.*
NQ, erit ellipsis QMN ad circulum QHN, ut
axis minor ad majorem. Idipsum ita simplicius
demonstratur. KGq : rect. QKN :: CMq : rect. QCN
(*b*). Sunt autem rectangula QKN, QCN qua- (b) *Per*
dratis KB, CH æqualia (*c*); ergo erit KGq : *1.huj.cap.*
KBq :: CMq : CHq; & (*d*) KG : KB :: CM : CH; (c) *Per*
quod cum semper accidat, patet esse ellipsim QMN *co.1.p.17.*
ad circulum QHN, ut CM ad CH, hoc est, ut *l.6.*
axis minor ad majorem. (d) *Per*

II. Ductis ex centro C rectis CP, CV, erit *22.l.6.*
pariter sector ellipticus CPN ad sectorem circularem CVN ut axis minor ad majorem; quandoquidem tam segmentum LRN ad segmentum LVN, quam triangulum CPL ad triangulum CVL est ut LP ad LV, seu ut CM ad CH.

III. Si tam circulus, quam ellipsis revolvantur circa axem QN, erit sphærois elliptica ad sphæram, ut quadratum axis minoris ad axis majoris quadratum. Nam cum sit CMq : CHq :: KGq : KBq, erit etiam circulus radii CM ad circulum radii CH, ut circulus radii KG ad circulum radii KB; idque cum semper accidat, ubicumque fuerit ordinata KGB, patet esse sphæroidem ellipticam ad sphæram, ut circulus radii CM ad circulum radii CH, seu ut quadratum axis minoris ad axis majoris quadratum.

IV. Hinc etiam facile consequitur ellipses esse *Fig. 76.*
inter se ut rectangula ex earum axibus. Describantur *& 77.*
enim super earum majoribus axibus semicirculi
AKQ, akq; & erit ellipsis ABQ ad circulum AKQ,
ut CB ad CK (*e*), seu sumpta CK pro commu- (e) *Per*
ni altitudine, ut rect. CB×CK ad CKq. Est præter- *cor. 1. hu-*
ea circulus AKQ ad circulum akq (*f*) ut CKq *jus prop.*
ad quad. ck; tum circulus akq ad ellipsim abq, ut (f) *Per*
ck ad cb, seu sumta ck pro communi altitudine, *pr.2.l.12.*

ut

ut quad. ck ad rect. cb×ck. Ergo ex æquo ordinate erit ellipsis ABQ ad ellipsim abq, ut rect. CB×CK ad rect. cb×ck, hoc est, ut quadrantes rectangulorum ex axibus conjugatis; proindeque erunt inter se ellipses ut ipsa axium conjugatorum rectangula.

SCHOLIUM.

Coronidis loco addemus ex tribus conicis sectionibus ellipsim omnium maxime in physicis contemplationibus locum habere, ex ejusque notis proprietatibus generales quasdam naturæ leges nobis innotuisse. Harum sane præcipua est, quod Planetæ omnes primarii ea vi ad Solem urgeantur, quæ sit quadrato eorum distantiæ a Sole reciproce proportionalis, secundarii quoque Planetæ eadem gravitatis lege ad suos primarios tendant; ac tandem quod corporum terrestrium gravitas eadem reciproca ratione quadratorum distantiarum a Telluris centro consistat; ut proinde catholica ea sit lex non minus cælestia, quam terrestria corpora afficiens. In cælestibus primum corporibus eam obtinere innotuit; tum ad terrestria translata est eam ob causam, quod vis qua Luna detinetur in orbe suo circa tellurem, ejusdem naturæ esse videatur cum vi gravitatis, qua terrestria quæque corpora deorsum urgentur, ob æqualia scilicet spatia, quæ duabus hisce viribus eodem tempore prope Telluris superficiem describerentur. Qua vero ratione ex notis ellipsis proprietatibus deprehenderint Physici eam legem in cælestibus corporibus obtinere nunc investigabimus.

Corpora omnia, quæ in orbibus curvilineis volvuntur vi certa urgeri debere ad punctum aliquod veluti centrum, centripeta idcirco dicta, qua cohibeantur ne ab orbitis suis per earum tangentes recedant,

aant, vix modo est qui nesciat. Eandem præterea vim ad illud punctum dirigi constat, ad quod ductis radiis areæ circa illud describuntur temporibus proportionales (a). Atqui reiteratis observationibus deprehensum est, Planetas primarios ita circa Solem revolvi, ut ductis radiis areæ circa illum describantur temporibus proportionales; secundarios quoque eadem lege circa suos primarios moveri; consequens ergo est primariorum Planetarum vim centripetam ad Solis centrum dirigi, secundariorum vero ad suorum primariorum centra (b).

(a) *Vid.* cor. 5. pr. 26. l. 6.

(b) *Vid.* cor. 6. pr. 26. l. 6.

Præterea post sagacissimi Kepleri observationes & illud receptum apud omnes est, Planetas scil. primarios motibus suis non circulos describere, ut veteres opinabantur, sed ellipses totidem, in quarum altero umbilico Sol reperitur; secundarios item Planetas similes orbitas ellipticas percurrere, in quarum umbilicis eorundem primarii degunt. Id ergo reliquum est, ut ex notis ellipsis proprietatibus determinemus, quæ sit conditio, quæ lex corporis in orbe elliptico revolventis, vi ejus centripeta ad unum ellipsis focum tendente.

Ad id vero præstandum præmittere prius oportet, quod si corpus revolvatnr in orbe quovis AMQ vi centripeta tendente ad punctum F, eumque tangat in M recta MR, & ab altero orbis puncto P ipsi M infinite proximo ducatur FD rectæ PM normalis, & PR eidem FM parallela tangenti occurrens in R; similisque fiat constructio ad aliud quodvis curvæ punctum m: erit vis centripeta in M ad vim centripetam in m, ut solidum $\frac{Fmq \times pdq}{pr}$ *ad solidum* $\frac{FMq \times PDq}{PR}$*; sive erit vis centripeta in M, reciproce ut solidum* $\frac{FMq \times PDq}{PR}$*, ubi figura* Fig. 78.

MRPD

MRPD est infinite parva. Vide Nevvt. Princ. Math. l. 1. prop. 6. cor. 1. Posito ergo quod curva AMQ sit ellipsis, & punctum F ad quod vis ista tendit sit ejusdem focus, determinandum est, quid sit ejusmodi solidum cui ea vis est reciproce proportionalis.

Sit C centrum ellipsis, per quod transeat ex puncto M diameter MCS, cujus conjugata diameter tangenti MR parallela sit LK. Ducatur ex P ad diametrum MS normalis Pn, & ex M ad suam conjugatam normalis MN; tum ex P sit tangenti MR parallela Po ipsi FM occurrens in o, & diametro SM in v. Jam vero ob rectos, & proinde æquales angulos MNE, PDo, & æquales item angulos (a) MEN, PoD, similia sunt triangula EMN, PDo; ideoque erit NM : ME :: PD : Po. Sed est (b) ME = CA; igitur erit NM : AC :: PD : Po. Ducta præterea LT ipsi CM parallela est parallelogrammum LTMC, seu rect. ex LC in MN æquale rectang. BC×CA (c), utpote ambo æqualium parallelogrammorum quadrantes; ideoque erit (d) NM : AC :: CB : CL. Sed est NM : AC :: PD : Po; ergo ex æquali PD :: Pv : CB : CL. Est vero ob punctum P punctum M infinite proximum Po ipsi Pv æqualis; erit itaque PD : Pv :: CB : CL; Tum PDq : Pvq :: CBq : CLq. Est præterea (e) Pvq : rect. SvM :: CLq : CMq; itaque erit ex æquo ordinate PDq ad rect. SvM, seu ad rect. vM×2MC, ut CBq ad CMq. Jam vero est (f) MC ad ME, vel AC, ut Mv ad Mo, vel PR; ergo etiam erit (g) MCq : MC×AC :: Mv×2MC : PR×2MC. Ergo rursus ex æquo ordinate erit PDq : PR×2MC :: CBq : MC×AC; eritque factum ex extremis PDq×MC×AC = CBq×2PR×2MC, quod fit ex mediis; & PDq×AC = CBq×2PR; & quadruplicando terminos erit 4AC×PDq = 4CBq×2PR, seu 2QA×PDq = Bbq×2PR, & dividendo utrimque per 2, erit tandem QA×PDq = Bbq×PR.

(a) Per 27. *l.* 1.

(b) Per *cor.* 5. *pr.* 9. *huj. c.*

(c) Per *pr.* 7. *huj. cap.*

(d) Per 16. *l.* 6.

(e) Per *pr.* 6. *huj. cap.*

(f) Per 4. *l.* 6.

(g) Per 1. *l.* 6.

Præ-

Praterea ellipsis latere recto dicto L, erit (*a*) $L \times QA = Bbq$; *ideoque si in æquatione inventa loco Bbq substituatur ejus valor* $L \times QA$, *fiet* $QA \times PDq = L \times QA \times PR$, & *dividendo per QA, fiet* $PDq = L \times PR$. *Si itaque in priori formula* $\frac{FMq \times DPq}{PR}$ *loco DPq substituatur ejus valor* $L \times PR$, *fiet* $\frac{FMq \times L \times PR}{PR}$, *seu* $FMq \times L$; *ideoque erit vis centripeta in M reciproce ut solidum quod fit ex L in FMq, seu ob constantem quantitatem L, reciproce ut quadratum distantiæ MF. Quod erat inveniendum.*

(a) Per cor. 3. p. 6. huj. cap.

F I N I S.

num

1

6

11

15

16

22

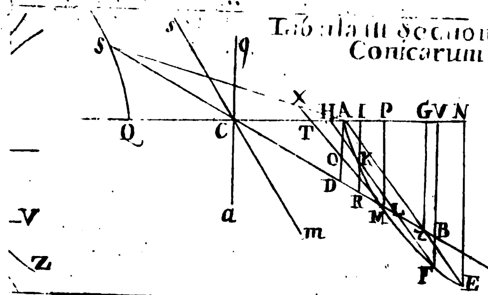
23

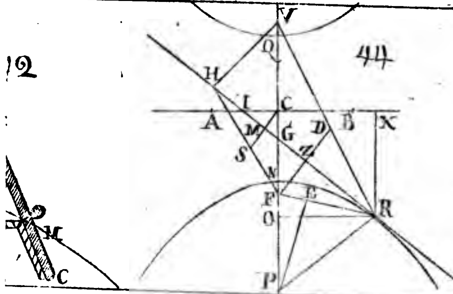
29

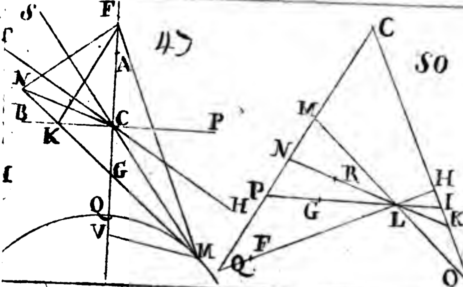
30

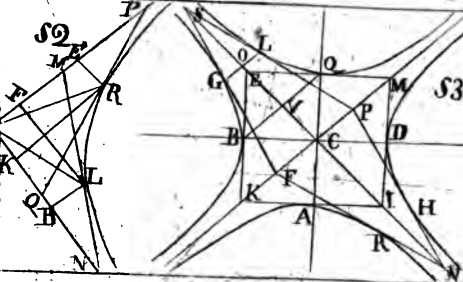
34

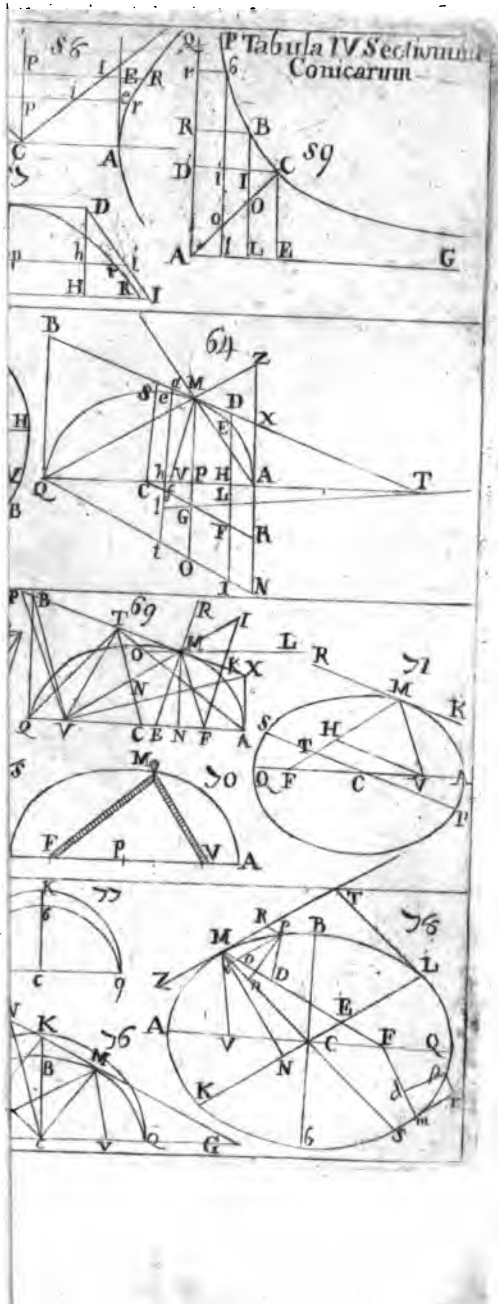



Tabula III Sectionum Conicarum
38


44


45
50


52
53



Tabula IV Sectionum Conicarum